

Paolo Zellini

BREVE STORIA DELL'INFINITO



ADELPHI eBOOK

PAOLO ZELLINI

Breve storia dell'infinito



Adelphi eBook

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore
È vietata ogni duplicazione, anche parziale, non autorizzata

La cornice della copertina è ripresa dal frontespizio di un libro tedesco del 1924

Prima edizione digitale 2011

© 1980 ADELPHI EDIZIONI S.P.A. MILANO

WWW.ADELPHI.IT

ISBN 978-88-459-7025-2

BREVE STORIA DELL'INFINITO

Ἐπειρον DI ARISTOTELE IL LIMITE E L'ILLIMITATO

«C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'Infinito». Così J.L. Borges introduce la sua breve biografia dell'Infinito in *Otras Inquisiciones*. Ma anche altrove traspare la sua concezione dell'infinito, spesso dissimulato in idee ad esso collegate, come assoluto male metafisico, operante nel cosmo come seme di disordine e assurdità. Non c'è nulla di più pericoloso della perdita del limite e della misura: l'errore dell'infinito è la perdita del valore contenuto nella relativa perfezione di ciò che è concretamente determinato e formalmente compiuto, ed induce perciò a smarrirsi nel nulla o in un labirinto senza via d'uscita.

Per rintracciare i fondamenti di una simile idea dell'infinito un inizio promettente potrebbe essere l'ascolto di un suggerimento di I. Kant: «Nonostante la grande ricchezza delle nostre lingue,» egli scrive «il pensatore si trova spesso in imbarazzo riguardo ad una espressione che si adatti esattamente al suo concetto, mancando della quale egli non può farsi intendere rettamente dagli altri, e neppure da se stesso. Coniare nuove parole, è una pretesa di legiferare in materia di linguaggio, la quale di rado ha successo; e prima di ricorrere a questo mezzo disperato, è consigliabile cercare in una lingua morta e dotta, per vedere se non vi si trovi questo concetto assieme alla sua espressione adeguata».¹

Per trovare una giustificazione metafisica allo *horror infiniti* e al fascino labirintico dell'infinità che segnano l'esperienza letteraria di Borges si potrebbe allora ricorrere ad una parola greca e trasferire momentaneamente ogni pensiero e considerazione al punto di vista deducibile dalla metafisica di Anassimandro, dei Pitagorici o di Aristotele. Nel pensiero greco alludere all'infinità voleva dire ricorrere a un termine di significato certamente non identico a quello racchiuso nel nostro «infinito». Il termine che lo designava era ἄπειρον, che vuol dire letteralmente «senza limiti» (limite in greco era πέρας) e quindi «illimitato». La sfera di significati tradizionalmente racchiusi nel termine ἄπειρον non rende certamente troppo inverosimili alcune asserzioni aristoteliche che ne svelano la natura da un lato divina e incorruttibile ma dall'altro ambigua e refrattaria ad

ogni accostamento e tentativo di comprensione. Aristotele non esitò, innanzitutto, ad attribuire all'infinito valore di principio. Nella *Fisica* (203 b 6) si legge che «Ogni cosa o è principio o deriva da un principio: ma dell'infinito non c'è principio, ch  sarebbe il suo limite. Inoltre   ingenerato e incorruttibile, in quanto   un principio, perch  di necessit  ogni cosa generata deve avere una fine e c'  un termine di ogni distruzione. Perci , come diciamo, esso non ha principio, ma sembra essere esso principio di tutte le altre cose e tutte abbracciarle e tutte governarle, come dicono quanti non ammettono altre cause oltre l'infinito...». «Inoltre esso   diverso» prosegue Aristotele «perch    immortale e indistruttibile, come vuole Anassimandro e la maggior parte dei fisiologi».

Ci sono prove dell'esistenza dell'infinito? Aristotele ne elenca alcune: il tempo (che   manifestamente infinito), la divisione delle grandezze; ma sussistono ragioni anche pi  profonde che consentono di non ridurre l'infinito a pura immaginazione: «solo se   infinita la fonte da cui   tolta ogni cosa generata non vengono mai meno generazione e distruzione» argomenta Aristotele. «Inoltre, ogni cosa limitata trova il suo limite sempre rispetto a un'altra cosa, con la conseguenza che non ci sar  pi  limite se sempre una cosa deve essere limitata da un'altra. Ma soprattutto il motivo principale   che produce una difficolt  comune a tutti   che, siccome non sono mai pienamente esauriti nel pensiero se il numero e le grandezze matematiche e tutto quel che c'  oltre i cieli pare che siano infiniti».²

La difficolt  inerente all'infinito consiste perci  nella sua inesauribilit : ci  che   infinito (Aristotele allude all'esempio dell'insieme dei numeri) non pu  mai essere presente nella sua totalit  nel nostro pensiero. Questa propriet  dell'infinito (cio  dell' πειρον) lo caratterizza al punto da poter costituire una sua prima definizione: si pu  ci  affermare che un qualsiasi insieme di oggetti   illimitato nel caso in cui, volendo individuarne ad uno ad uno tutti gli elementi, non si riesce a formarne un tutto, perch  ci sar  sempre e in ogni caso qualche elemento che non avremo considerato. Ad esempio, se consideriamo i numeri interi, essi formano un insieme infinito perch  potremo contarne un numero arbitrariamente grande senza mai raggiungere un limite al di l  del quale non ci siano altri numeri che non abbiamo ancora contato. «L'infinito ( πειρον)» scrive Aristotele «non   ci  al di fuori di cui non c'  nulla, ma ci  al di fuori di cui c'  sempre qualcosa».³ L'illimitato non pu  dunque in nessun caso essere riguardato come un tutto completo: ci  che   completo ha una fine e la fine   un elemento limitante, mentre l' πειρον indica appunto, per suo significato intrinseco, l'assenza di ogni limite.

All' πειρον resta perci  indissolubilmente associata un'idea negativa, espressione della sua incompletezza e potenzialit  non attuata e non attuabile.   per questo motivo che il termine

«indefinito» (oppure «illimitato») appare preferibile al termine «infinito» per sintetizzare in una sola parola la sfera di significati attribuibili all'ἄπειρον. L'«infinito» può infatti alludere a un'idea di perfezione estranea a ciò che l'ἄπειρον vuole indicare, e può quindi dissimulare una prima tentazione di esaurire l'incompletezza dell'illimitato designato dalla parola greca in un'attualità che non gli è propria. Tale precisazione è importante, anche perché contiene le ultime ragioni di alcuni tipi di risoluzione di problemi matematici e geometrici ove interviene l'infinito. Il rifiuto di introdurre l'infinito attuale nella matematica greca (a parte poche eccezioni) non si può comprendere se non riconducendosi all'idea negativa cui l'ἄπειρον allude.

Il carattere di non-esistenza implicito nell'ἄπειρον e in ciò che esso non riesce a contenere è indicato dal suo accostamento alla «στέρησις»⁴ cioè alla privazione, che costituisce la necessaria e momentanea premessa di ogni moto evolutivo. Il divenire appare così, in ogni istante, una sintesi del limite (πέρας) e dell'illimitato (ἄπειρον): il limite è ciò che fa esistere concretamente ogni oggetto, conferendogli in ogni istante una sua propria forma e individualità; ed è anche ciò che determina l'ordine logico degli eventi sottraendoli, per quanto è possibile, alla pura casualità. D'altronde non esisterebbe storia né evoluzione di alcun tipo se non esistesse, accanto al limite, un principio di natura opposta che ostacoli la tendenza di ogni oggetto a permanere rigidamente fissato nei contorni della sua esistenza impostagli dal principio del limite. Tale principio è appunto l'illimitato. Esso appare come principio negativo e dissolvente, perché ostacolare l'ordine imposto dal limite significa evidentemente ricondurre la realtà a uno stato informe e disorganizzato, ove ogni cosa perde la sua riconoscibilità come ente concreto e gli eventi appaiono slegati, imprevedibili e suscettibili di un'evoluzione priva di logica. Tale stato è tuttavia la necessaria premessa per l'intervento successivo del limite, che in ogni momento corregge la situazione di indefinita potenzialità implicita nell'illimitato e impone agli eventi uno sviluppo razionale.

Il divenire sembra costituire la tipica sfera d'azione del principio dell'ἄπειρον (è l'ἄπειρον stesso, secondo Anassimandro, a innescarlo con il suo movimento primigenio), che vi appare sia come dissoluzione di forme che come elemento casuale.⁵ Vale anche l'inverso: l'esistenza di un insieme illimitato si spiega mediante l'idea del divenire; i suoi elementi costitutivi, non esistendo tutti simultaneamente, cioè non essendo tutti, ad uno ad uno, attualmente dati, esistono solo sotto la specie di una successione storica, cioè uno *dopo* l'altro, in un susseguirsi interminabile, esattamente come all'1 segue il 2, al 2 segue il 3... e così di seguito. L'esistenza dell'infinito è in questo senso, per Aristotele, non attuale, bensì potenziale, ed è perciò accostabile al principio materiale dell'esistenza assai più che al principio

formale di cui è anzi, diciamo così, l'antitesi.⁶

Ἄπειρον è tuttavia un principio «divino, immortale e indistruttibile», sembra sostenere Aristotele al pari di Anassimandro. Ma può un principio negativo essere associato al divino? Anassimandro usò l'infinito in due sensi diversi, l'uno, temporale, rapportato all'inesauribilità della successione dei cicli cosmici, l'altro alla permanenza e atemporalità del loro ultimo substrato. In quest'ultimo senso Anassimandro usò Ἄπειρον come sinonimo di Dio (τὸ θεῖον); ma τὸ θεῖον, fu osservato,⁷ indica, al contrario di θεός, un principio metafisico neutrale cui ben si addice l'idea della pura negatività cui Ἄπειρον allude. Dio è definibile solo come essere indefinibile, e la teologia negativa, negando tutto di Dio, ne dà così l'unica descrizione possibile: non diversamente avrebbero alluso al «divino» lo Pseudo-Dionigi, Scoto Eriugena, nel *De divisione naturae*, e Niccolò Cusano. Proclo, ricorda il Cusano,⁸ osserva che lo stesso Platone parlò del primo principio negandogli ogni attributo, e la mente divina fu chiamata dagli Orfici, ci attesta M. Ficino, ἄπειρον ὄμμα, cioè «occhio infinito».⁹

Forse non a torto P. Tannery¹⁰ derivò Ἄπειρον di Anassimandro, anziché da πέρας (limite), da πείρα (conoscenza, esperienza), e ne fece così l'«inconoscibile», l'«insondabile» (Platone usa sovente ἀπειρία per «inesperienza»); ma i due significati sono simili e si specchiano uno nell'altro: tra l'Uno indefinito e la creatura finita s'apre un'invalicabile distanza, cioè un infinito potenziale configurabile come incalcolabile numero di passi successivi che percorsi uno ad uno non portano mai alla meta (Zeus, dice Omero, dista dalla terra per tutta l'incolmabile estensione dell'etere: δι' αἰθέρος ἀτρυγέτοιο).¹¹ D'altronde, secondo Aristotele, ciò che non ha limite (πέρας) non è rappresentabile esaurientemente nel nostro pensiero, ed è perciò inconoscibile.

L'illimitato era per Aristotele il substrato materiale degli oggetti visibili, immaginabile per un certo verso come la loro indefinita divisibilità.¹² In effetti un'entità corporea è in sé una forma compiuta, un 'tutto' irripetibile eretto dal principio formale, limitante, sul substrato dell'infinita potenzialità, racchiusa negli infinitesimi che lo compongono. Quando entra in gioco la divisione si comincia a parlare di 'parti' e non più di 'tutto', e la forma appare già compromessa; ma quando la divisione è portata (idealmente) alle conseguenze estreme, cioè agli infinitesimi, la forma originaria appare disgregata, irricognoscibile e ricondotta infine a ciò che potrebbe ritrasformarsi in altro.¹³ Nella divisione all'infinito è implicita una tendenza al ritorno della pura potenza, del principio sostanziale (ὕλη) di ogni esistenza successiva. Nell'ἄπειρον di Anassimandro troviamo anche l'ultimo principio di tale materialità, la causa completa della nascita e della distruzione del tutto: di lì si sono

originati per separazione i cieli e in generale tutti i mondi (che sono infiniti) in un avvicinarsi ciclico di nascita e distruzione.

Il Caos e la Notte, come pure la Tiâmat babilonese o la Mrtyu indù, sono perciò mitici sinonimi dell'ἄπειρον inteso come estremo principio sostanziale.¹⁴ Tiâmat, resasi colpevole di connivenza col Male, viene confinata dal dio Marduk al ruolo di estremo residuo cosmico e Mrtyu, la dea della morte e della fame, subisce la stessa sorte per mano dei Deva. Ma dai confini del Mondo, il Nulla e l'Indefinito, così arginati, continuano a svolgere un ruolo ineliminabile di avvolgimento (l'ἄπειρον di Anassimandro è avvolgente: τὸ περιέχον) e sostentamento di tutte le cose, e ad essi tutto tende a ricondursi alla fine di ogni ciclo cosmico.

Il mito rivela così la più riposta ed enigmatica natura dell'infinito; parla della sua originale assolutezza e neutralità, che allo stadio dell'ente e della forma creata si tramuta nel polo negativo dell'illusoria dualità, di forma e materia, che da esso stesso proviene. «... L'illimitato è duplice» scrisse Plotino.¹⁵ «In che cosa consiste la differenza? In questo, che è l'uno l'esemplare, l'altro l'immagine. Inferiore, quindi, l'illimitato di quaggiù? Maggiore, anzi; quanto più l'illimitato-immagine fugge dall'essere - quello verace - tanto più esso è illimitato. Poiché la indefinitezza è maggiore in ciò che ha una minore determinazione. Infatti, il meno nel bene è un più nel male».

Gli assai frequenti termini negativi quali ἀγένητον, ἀνώλεθρον, ἀτέλεστον, ἄπειρον, ἀφθαρτον utilizzati ad esempio da Parmenide o da Aristotele alludono insistentemente a una realtà ineffabile, di cui si può cercare una descrizione in termini discorsivi solo al rischio di smarrirsi nei labirinti del falso infinito, cioè dell'immagine illusoria della totalità che si vorrebbe genialmente intuire. Damascio scrisse che Platone, arrivato fino all'Uno, tacque: «Appena infatti mosso il discorso intorno a ciò che assolutamente non esiste, si ritrasse e pericolò di cadere nel mare della dissimilitudine o, per meglio dire, di una vacuità senza appoggio».¹⁶

Nel *Tao tê ching* è scritto che «è grazie al costante alternarsi del Non-essere e dell'Essere che si vedranno dell'uno il prodigio, dell'altro i confini».¹⁷ Ove la realtà è regolata dal confine il vero infinito non può dunque manifestarsi se non contratto nella forma finita: per chiunque permanga nel regno dell'Essere il travalico del limite e l'aspirazione al prodigio sono sempre sul punto di confondersi con la pura e semplice disgregazione della forma. È l'eterna somiglianza di santità e follia, ed è anche uno dei principali e più riposti motivi di attrazione del male. «Un tale» raccontò Kafka «si stupiva della facilità con cui percorreva la via dell'eternità; in effetti, la stava volando giù in discesa».¹⁸

Non diversamente da Anassimandro, sostiene Teofrasto, concepì l'infinito Anassagora di Clazomene. Anassagora chiamò

illimitato il caotico miscuglio originario in cui nulla esisteva perché le forme non erano ancora concepite. Secondo un frammento (tramandatoci da Simplicio) egli descrive come «insieme erano tutte le cose, illimiti per quantità e per piccolezza, poiché anche il piccolo era illimito». L'estrema rarefazione implicita nella riduzione di ogni cosa a parti infinitesime prive di alcun rapporto e principio organizzativo era descritta dalla predominanza su tutto dell'aria e dell'etere, entrambi illimitati. Ma nel caos si cela, avrebbe scritto il Cusano ne *Il gioco della palla*, una potente virtù elementare: le «particelle elementari (omeomerie) che lo compongono sono suscettibili di essere messe in moto dall'intervento ordinatore dell'Intelletto, che ne scioglie il mutuo rapporto di reciproca indifferenza e ne fa scaturire le forme mediante un processo di separazione. Ma le omeomerie di Anassagora non sono, come gli atomi di Democrito, indivisibili particelle materiali che limitano la divisibilità dei corpi a un punto determinato impedendone una frantumazione all'infinito. Sono esse stesse divisibili all'infinito in una quantità di componenti infinite volte infiniti. «In effetti» scrisse Anassagora «del piccolo non c'è il minimo, ma sempre un più piccolo», come pure «anche del grande c'è sempre un più grande: e per quantità è uguale al piccolo e in rapporto a se stessa ogni cosa è e grande e piccola».

Ma in qualche interstizio di questa inesauribilità dell'illimitato stanno le cause di differenziazione delle forme: se si divide un corpo indefinitamente sarà impossibile giungere a degli elementi costitutivi elementari e indivisibili, ma nel corso della divisione forse si incontrerà, a un livello pressoché infinitesimale, qualche precisione di rapporto o qualche impercettibile diversità di distribuzione degli illimiti che fa preferire la generazione di quella forma anziché di un'altra. Infinite sono le possibilità di diversificazione e molte tra esse dipendono anche da piccoli o addirittura infinitesimi mutamenti di invisibili proporzioni e interrelazioni tra gli elementi costitutivi. Aristotele cercò di dimostrare come piccole alterazioni sono causa di grandi alterazioni anche se non in virtù di se stesse, ma a causa della diversa inclinazione dei principi; e tali principi, aggiunse Aristotele, sono piccoli in grandezza, ma grandi in potenza, e da essi possono anche scaturire i contrari (ad esempio maschio e femmina).¹⁹

In Anassagora già comparvero i temi principali di ogni successiva analisi dell'infinito: l'incalcolabile numero di combinazioni degli infinitesimi e le imponderabili situazioni che generano le innumerevoli differenze formali alludono indubbiamente all'esistenza di un principio di continuità operante nella natura; Leibniz ne avrebbe fatto uno dei punti centrali della propria speculazione.²⁰ L'inesauribilità dell'illimitato e l'impossibilità a cogliere un assoluto minimo o un assoluto

massimo, oltre a costituire un argomento centrale di continua meditazione, dalle scuole filosofiche di Oxford o Parigi nel XIV secolo alla metafisica di molti uomini del Rinascimento, fino a giungere a Leibniz e a Newton, fu alla base della definitiva formulazione che si dette al calcolo infinitesimale nello scorso secolo per opera di Cauchy e Weierstrass.

Ma la più esplicita dichiarazione della bipolarità fondamentale che regola il movimento del cosmo, espressa in termini di «finito» e «indefinito», venne dai Pitagorici. Ippolito scrive che il caldeo Zarata disse a Pitagora come «due siano fin dal principio le cause delle cose che sono, il padre e la madre: e che il padre è la luce, la madre la tenebra: e che della luce son parti il caldo il secco il leggero il veloce, della tenebra il freddo l'umido il pesante il lento; e che da questi, femmina e maschio, è composto tutto il cosmo». ²¹ I due principi di cui la saggezza caldea, secondo Ippolito, indicò i nomi sopra elencati, furono chiamati dal pitagorico Filolao «limite» (πέρας) e «illimitato» (ἄπειρον), e mentre il bene fu associato al limite, il male fu detto simile all'illimitato.

La portata universale dell'asserzione pitagorica sta nel fatto che è ovunque concretamente ed effettivamente intuibile una antitesi o un movimento dialettico dei due principi. Nelle sue ricerche naturali Goethe l'avrebbe implicitamente riscoperto in epoca moderna con la stessa densità di intuizione e percezione della potenzialità applicativa e classificatrice del reale che è lecito supporre fosse stata dei Pitagorici. Egli usò il criterio della polarità e dell'oscillazione ritmica come *metodi* primari d'indagine per una fondamentale ripartizione dei fenomeni. Vide nell'avvicinarsi di sistole e diastole l'essenza di ogni sviluppo organico, com'è il caso tipico della crescita di una pianta (*Morfologia delle piante*, 73 e 121): essa consiste infatti in un continuo alternarsi di espansioni (illimitate) e contrazioni (limitanti); a partire dal seme, ove si ha la massima concentrazione (limite) si giunge al massimo sviluppo della foglia caulinaria (illimitato); quindi, successivamente, il calice nasce per contrazione (limite) e i petali per una nuova espansione (illimitato). Il movimento di espansione culmina nel frutto, nel quale però è come dissimulato l'intero fusto contratto.

E fu ancora l'opera di Goethe ad essere menzionata da Hermann Broch come il prototipo di una riunificazione tra scienza e letteratura sotto il segno di una comune penetrazione dell'infinito. Meglio di ogni altro dopo il Rinascimento, scrisse Broch, Goethe seppe fondere interessi scientifici e aspirazioni artistiche, assegnando alla poesia il potere di evocare simbolicamente quelle *forze madri* del cosmo, quella radice comune di ogni polarità (un infinito antistante ad ogni successivo confronto tra limite e illimitato) in cui erano pure incentrate le aspirazioni della scienza.

Limite e illimitato furono anche i principi secondo cui si svolse l'intera aritmetica pitagorica, come ci fu restituita da Plutarco, Teone di Smirne, Nicomaco di Gerasa e Boezio. In questa aritmetica sono descritte le ripartizioni fondamentali degli interi secondo le analoghe bipolarità del pari e del dispari, dell'eguaglianza e della diseguaglianza, dell'indivisibile e del divisibile, che regolano anche il successivo dispiegarsi dei numeri naturali e delle proporzioni negli schemi a forma di «lambda» e di «delta» comuni alla tradizione platonica e pitagorica, e reinterpretati nel secolo scorso da Albert Freiherr von Thimus nel suo *Die harmonikale Symbolik des Alterthums* (Köln, 1868).

Ma dai procedimenti aritmetici è anche deducibile una funzione del limite posta in un certo senso 'al di fuori' di ogni movimento polare, e prospettante una possibile riunificazione finale del limite e dell'illimitato in un'entità forse definibile ma inestricabilmente legata al non-essere. Questo succede tutte le volte che le successive definizioni di numeri interi tramite proporzioni definiscono un progressivo avvicinamento a qualche numero irrazionale. Così dall'aritmetica di Nicomaco di Gerasa ²² si deduce un procedimento di approssimazione al numero aureo $(1 + \sqrt{5}) / 2$ con successivi rapporti approssimanti alternativamente per eccesso e per difetto, secondo l'indefinito sviluppo della polarità grande-piccolo designata dal greco μέγα καὶ μικρόν.

E le leggi fondamentali dell'aritmetica sono anche quelle della geometria. Proclo avrebbe riconosciuto nel *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* che l'intera geometria è articolata tra il limite e l'illimitato, esemplificabili nella bipolarità del retto e del curvo; e questa verità avrebbe attraversato l'intera speculazione matematica del Rinascimento fino a Leibniz, che avrebbe ancora ricondotto la composizione di ogni figura geometrica al retto e al circolare.

Anche Copernico, come ci attesta P. Feyerabend nel suo *Contro il metodo*, concepì qualcosa di simile quando osservò che il movimento di un sasso che cade dovrebbe essere «misto di retto e circolare».

Il limite, scrive Simone Weil,²³ è qualcosa che è costantemente oltrepassato, ma impone di rimando un'oscillazione compensatrice e dell'indefinito svolgersi di tale oscillazione è immagine il movimento circolare. Nei *Problemata* aristotelici è immaginata la risposta che il pitagorico Archita avrebbe fornito a chi avesse chiesto il perché della rotondità del tronco e dei rami di un albero, oppure delle gambe e delle braccia di un uomo: esiste un movimento naturale volto all'identico e che, seguendo la legge del limite, torna su se stesso dando origine a cerchi e ad altre figure rotonde.²⁴

Psicologicamente l'illimitato si manifesta, come rilevò ad esempio I. Kant, nel continuo rimando di ogni predicato a un

soggetto che gli appartenga: rimando indefinito, perché non si giunge mai a un soggetto ultimo, come non si giunge mai all'ultimo substrato di ogni accidente. Sembrerebbe che la coscienza di se stessi, cioè l'immediata intuizione di se stessi come soggetto pensante, fornisca infine un sicuro approdo al regresso all'infinito di predicati e soggetti. Ma è pura illusione, dice Kant; non si dà vera conoscenza del proprio essere assoluto appunto perché è impossibile darne un predicato. Il pensiero discorsivo è perciò in tal senso intrinsecamente illimitato; esso percorre un infinito potenziale che non ha termine né soluzione. Il limite, in tale processo, coincide allora con l'applicazione, passo per passo, del principio di identità («A è A» oppure «x = x») e con la tendenza a chiudere la comprensione di ogni oggetto del nostro pensiero come in un corto circuito che lo estraiga dal flusso discorsivo e lo isoli da tutto ciò che esso non è.

Anche Platone affermò, nel *Filebo* (IV), che la contrapposizione tra finito e infinito è una condizione intrinseca, che non finisce e non invecchia, del nostro modo di pensare e di discorrere. Ogni cosa, ripete Platone, ha in sé connaturati il limite e l'illimitato, o, usando espressioni equivalenti, l'uno e il molteplice. Il caso della divisione dei corpi è ancora una delle più limpide rivelazioni dell'irriducibile conflitto tra unità e molteplicità (ma vale la pena non scordare mai che unità e molteplicità sono sinonimi del limite e dell'illimitato); ogni oggetto è ravvisabile come un tutto completo, sinteticamente visibile e tangibile (o concepibile); ma esso è anche l'insieme di tutte le sue parti, che costituiscono una molteplicità infinita, sfuggente a un'effettiva ed esauriente enumerazione. È perciò l'uno riducibile al molteplice, o viceversa è il molteplice riducibile all'unità? Il problema, dice Platone, può essere ed è di fatto risolto in concreto dall'esistenza effettiva, nelle cose, di una sintesi o mistione del limite e dell'illimitato. Un corpo umano, ad esempio, è un tutto composto di parti; ma queste parti rispettano proporzioni numeriche e armoniche ben definite nelle quali l'unità dell'insieme si articola con misura, non frantumandosi subito nell'illimitato, ma soffermandosi invece in una zona intermedia in cui ritmo e bellezza possano concretamente svilupparsi e rivelarsi. Il numero, ἀριθμός, sinonimo di misura e armonia, (ἀριθμός e ἀρμονία hanno la stessa radice) è come una pausa, o un punto di mediazione tra il limite e l'illimitato; è il dono prometeico (Prometeo è da Eschilo chiamato «padre del numero») che garantisce all'uomo la possibilità di un'esistenza stabile e ordinata, sottraendolo a un acrobatico e rischioso equilibrio tra l'assoluta unità e l'assoluta molteplicità; ché di equilibrio poi non si tratterebbe, poiché l'approccio diretto all'assoluto può facilmente ridursi, infine, alla pericolosa esperienza del falso infinito.

Nell'antichità lo *horror infiniti* toccò un culmine negli scritti di Boezio. Egli arrivò a parlare dell'illimitato come di un mostro di

malizia (*malitiae dedecus*), non sostenuto da alcun principio, sempre sfuggente a qualsiasi definibilità; un oggetto che la scienza e la filosofia volentieri ripudiano, riconoscendolo refrattario ad ogni tentativo di comprensione.²⁵ L'imbarazzo principale, già denunciato da Aristotele, era dovuto alla contraddizione della regola per cui l'atto precede logicamente e naturalmente la potenza. L'eccezione più tipica è il numero che, spiega Boezio,²⁶ pur potendo aumentare illimitatamente configurandosi ad ogni passo come entità attuale, come dieci o cento, non raggiunge mai la conclusione cui la sua indefinita accrescibilità sembra orientata; l'atto che dovrebbe racchiudere e dar senso a questa potenzialità sembra addirittura non esistere.

In epoca moderna Spinoza, Hegel e Leopardi colsero la negatività dell'infinito potenziale rapportandolo al desiderio e all'immaginazione.

Spinoza chiamò il falso infinito infinito dell'immaginazione e Leopardi scrisse che l'infinito è un «parto della nostra immaginazione, della nostra piccolezza a un tempo e della nostra superbia... un sogno, non una realtà» perché «niuna prova abbiamo noi dell'esistenza di esso, neppure per analogia...».²⁷

Anche Leopardi distinse l'infinito dall'indefinito e vide in quest'ultimo un'amabile contraffazione del primo, un prodotto ingannevole dell'esercizio di un'immaginazione tesa all'intuizione della totalità. «Non solo la facoltà conoscitiva» egli scrisse «o quella di amare, ma neanche l'immaginativa è capace dell'infinito, o di concepire infinitamente, ma solo dell'indefinito, e di concepire indefinitamente. La qual cosa ci diletta perché l'anima non vedendo i confini, riceve l'impressione di una specie di infinità, e confonde l'indefinito coll'infinito, non però comprende né concepisce effettivamente nessuna infinità. Anzi nelle immaginazioni le più vaghe e indefinite, e quindi le più sublimi e dilettevoli, l'anima sente espressamente una certa angustia, una certa difficoltà, un certo desiderio insufficiente, una impotenza decisa di abbracciar tutta la misura di quella sua immaginazione, o concezione o idea».²⁸

Nulla rivela così perfettamente l'illusorietà dell'illimitato come l'indefinibilità di un autentico oggetto del desiderio. Leopardi scrisse nello *Zibaldone* (165-167) che il più riposto motivo della tendenza dell'animo umano all'illimitato risiede principalmente nel desiderio del piacere e nel sottrarsi di quest'ultimo a una qualsiasi definitiva saturazione. La natura più profonda del desiderio è la sua proiezione su un oggetto assoluto e inesistente, non identificabile con alcun piacere definito, ed è perciò che una tal natura «porta con sé materialmente l'infinità, perché ogni piacere è circoscritto, ma non il piacere, la cui estensione è indeterminata, e l'anima amando sostanzialmente il piacere abbraccia tutta l'estensione immaginabile di questo sentimento, senza poterla neppure concepire, perché non si può formare idea

chiara di una cosa ch'ella desidera illimitata».²⁹ La conseguenza è che il raggiungimento di un qualsiasi oggetto desiderato, essendo questo limitato e circoscritto, procura come un vuoto nell'anima, un dolore anticipato per la scoperta della sua illusorietà e per la prefigurazione della sua fine. Succede allora che il piacere infinito che non si può riscontrare nella realtà trova il suo posto ideale nell'immaginazione da cui proviene il carattere fittizio di tutte le nostre speranze e illusioni.

«L'immaginazione» scrisse S. Weil «è sempre legata al desiderio... Solo il desiderio senza oggetto è vuoto di immaginazione. Il bello è nudo, non velato di immaginazione. C'è presenza reale di Dio in tutte le cose non velate di immaginazione. La consacrazione dell'ostia è un'operazione soprannaturale che mette a nudo un pezzo di materia. Il bello cattura in noi la finalità e le toglie la fine, cattura il desiderio e gli toglie l'oggetto, dandogli un oggetto presente e impedendogli di lanciarsi verso l'avvenire».³⁰

Nel supplizio di Tantalo, in cui Hegel vide nell'*Estetica* il simbolo del falso infinito, si configura l'indefinita ripetizione dell'atto volto al raggiungimento della sua meta illusoria: la monotonia è un elemento sempre presente nell'infinito potenziale. Le punizioni di Tantalo e Sisifo, scrive Hegel, sono «l'in sé smisurato, la cattiva infinità, la brama del dover essere, oppure l'insaziabilità dei desideri naturali soggettivi che nel loro costante ripetersi non raggiungono mai l'ultima quiete del soddisfacimento. Infatti, l'esatto senso divino dei Greci ha considerato il passare nel vasto e nell'indeterminato, non secondo l'anelito moderno, come il punto più alto per l'uomo, ma come una condanna, e l'ha bandito nel Tartaro».³¹

Il senso 'positivo' del limite e la forza dissolvente dell'illimitato furono ancora intuiti e sentiti in ogni loro aspetto da R. Musil. Il valore del confine e della misura è descritto in *Der Mann ohne Eigenschaften* ove è attribuita ad Arnheim la consapevolezza di quel profondo segreto morale insito nell'uomo, ma andato oggi quasi universalmente perduto, consistente nella semplice intuizione che non è lecito permettersi tutto. «Onestà, continenza, cavalleria, musica, la morale, la poesia, la forma, il divieto, tutto ciò non ha altro scopo più profondo che dare alla vita una forma limitata e precisa». «La felicità senza limiti non esiste» scrive Musil. «Non v'è grande felicità senza grandi divieti. Anche negli affari non si può correr dietro a qualunque profitto, se no non si approda a nulla. Il confine costituisce l'arcano del fenomeno, il segreto della forza, della fortuna, della fede e del problema di sostenersi, uomo microscopico, nell'universo sconfinato».³²

Ma il limite incarnato in qualche regola morale o norma etica non può costituire un assoluto e deve essere alimentato, per sopravvivere, da una propria ininterrotta forza e necessità

interiore: esso è sempre soggetto all'effetto dissolvente dell'illimitato. Sicché «è altrettanto vero» osserva Musil «che la nostra morale è la cristallizzazione esterna di un movimento interiore pienamente diverso da essa».³³ «L'attitudine al bene, la quale in qualche modo è pur presente in noi, corrode subito le pareti se la si rinchiude in una forma fissa, e attraverso quella fessura si butta al male!... I sentimenti non sopportano di essere legati». E ancora: «guai se la fede è vecchia di un'ora!».³⁴

Ogni volta che la crisi di un'epoca sembra trascinare con sé la disgregazione della morale vigente e l'illimitato travolgere le forme appassite e vuote del limite, l'estrema difesa e ricapitolazione di uno stato che consenta una sopravvivenza etica è suggerita dal protagonista di *Der Mann ohne Eigenschaften*: una morale che sia dotata di reale potere di accrescimento e non sia soggetta a periodiche catastrofiche sconfitte dovrebbe, per Ulrich, fondarsi non su un ordinamento stabilito per l'eternità bensì sull'ininterrotta attività di una fantasia creatrice, non regolata dall'arbitrio, capace di plasmare gli svariati suggerimenti che scaturiscono dall'infinito complesso delle possibilità di vivere. La morale andrebbe costruita in tal caso sui successivi gradini dell'esperienza e non sarebbe un ideale stabilito per sempre cui l'uomo normalmente non sa accedere per la sua scarsa purezza.

Ma la proposta di Ulrich è problematica. La forza morale viene in questo modo decomposta e ricondotta al suo puro substrato materiale (l'infinito complesso delle possibilità di vivere); mentre le scoperte della fantasia, da cui si attende la sperata soluzione, sono pur esse delle forme, in cui non si può nutrire un'incondizionata fiducia.³⁵ Un più profondo suggerimento, in cui è sfiorata l'ultima verità ove svanisce il perenne contrasto tra il limite e l'illimitato, sembra scaturire da un colloquio di Ulrich con il fanatico Hans Sepp: «la massima potenza che un uomo può sentire in sé... è in fondo uno stato di quiescenza, in cui nulla mai cambia, come un'acqua ferma».³⁶

1. *Critica della ragione pura*, Dial. trasc., I, I, Milano, 1976, p. 373.

2. *Fisica*, 203 b 20.

3. *Fisica*, 207 a 1.

4. Cfr. Aristotele, *Fisica*, 207 b 35 - 208 a 1.

5. Sulla relazione tra casualità e principio materiale (illimitato) cfr. G. Milhaud, *Le hasard chez Aristote et chez Cournot*, in «Rev. de Métaph. et de Morale», 1902, pp. 667-681.

6. *Fisica*, 207 a 21.

7. G.B. Burch, *Anaximander, the First Metaphysician*, in «Rev. of Metaph.», 3, 1949, pp. 137-160.

8. *Il Berillio*, XI, in *Opere Filosofiche*, Torino, 1972, p. 650.

9. Cfr. G. Bruno, *De la causa, principio et uno*, a cura di G. Aquilecchia, Torino, 1973, p. 68.

10. «Rev. de Phil.», 4, 1904, pp. 703-707.

11. Cfr. R. Mondolfo, *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica*, Firenze, 1956, p. 34. Mondolfo traduce ἀτρώγετος con «inesauribile», «infinito», «invalicabile».
12. *Fisica*, 207 a 22.
13. Aristotele, però, nega che l'avvicinarsi della generazione e della corruzione implichi l'infinito in atto. Pur essendo la disgregazione un ritorno all'illimitato è possibile che il trapasso dalla corruzione alla generazione si svolga senza infrangere i confini del limite (*Fisica*, 208 a 9).
14. Cfr. R. Mondolfo, *op. cit.*, pp. 56-57 e la *Bṛhad-āraṇyaka-upaniṣad*.
15. *II Enneade*, trad. it. Bari, 1973, vol. I, p. 196.
16. *Quaestiones de primis principiis*, Frankfurt, 1826, citato nell'introduzione di R. Gnoli a Nāgārjuna, *Madhyamaka kārikā*, Torino, 1968.
17. *Tao tê ching*, I, Milano, 1973, p. 27.
18. *Confessioni e immagini*, Verona, 1960, p. 62.
19. *Sulla generazione degli animali*, 788 a 13.
20. Cfr. R. Mondolfo, *op. cit.*
21. *Refutatio contra omnes haereses*, ed. Wendland, 1-2, 12, p. 7, in *I Presocratici*, vol. I, Bari, 1969, p. 123.
22. Cfr. Nicomaque de Gêrase, *Introduction arithmétique*, Paris, 1978, p. 32.
23. *Cahiers*, II, Paris, 1972, p. 32.
24. *Problemata*, 16,9. 915 a 25, in *I Presocratici*, cit., p. 490.
25. *De institutione arithmetica*, ed. Friedlein, Leipzig, 1867, pp. 9 e 126.
26. *Commentarii in librum Aristotelis*, Leipzig, 1877, pp. 206-207.
27. Zibaldone, 4177-4178, cfr. G. Leopardi, *Opere*, vol. II, Firenze, 1976, p. 1099.
28. Zibaldone, 472-473, *Ibidem*, p. 166.
29. *Ibidem*, p. 80.
30. *Cahiers*, III, Paris, 1974, p. 192. Nella *Bhagavad Gītā* (II, 47) è detto che l'uomo è chiamato ad agire, ma non a godere del frutto delle sue azioni. Da cui l'ingiunzione «Non prendere mai come movente il frutto della tua azione», perché «chiunque... agisce sotto il dominio del desiderio, questi non ottiene né perfezione, né felicità, né fine ultimo» (XVI, 23), trad. it. Milano, 1976, pp. 39 e 156.
31. *Eстетica*, II, sez. 2, cap. I, Torino, 1967, pp. 524-525.
32. *Der Mann ohne Eigenschaften*, 1-105. Cito dall'edizione italiana *L'uomo senza qualità*, Torino, 1962, p. 488.
33. *Ibidem*, p. 724.
34. *Ibidem*, p. 731.
35. *Ibidem*, p. 995.
36. *Ibidem*, p. 542.

II

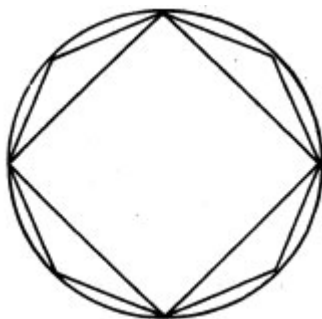
IL LIMITE

Vi fu qualche accenno, nel pensiero classico, alla possibilità di attualizzare l'infinito, assolvendolo dalla negatività del suo essere semplicemente potenziale?

Apparentemente, una prima ricerca in tal senso sembra condurre ai tentativi atomistici di individuazione di un «minimum», cioè di un infinitesimo dato in atto capace di risolvere in Essere il divenire illimitato della divisibilità del continuo. Vengono allora in mente gli accenni di Platone ad una intuizione atomistica dello spazio, oppure gli atomi di Democrito e Leucippo e i «cacumina» di Lucrezio. Ma le teorie di Democrito e di Epicuro erano riferite alla materia, e la durezza, compattezza e solidità delle sue parti elementari non volevano rappresentare l'essenza di ciò che si sarebbe potuto definire un «infinitesimo». Gli atomi erano piccoli, ma non infinitamente piccoli.

Sembra più facile allora trovare un implicito accenno agli «infinitesimi» nei tentativi di quadratura del cerchio di Antifonte e Brisone. Antifonte, ad esempio, pensava di poter trovare un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato appellandosi all'evidenza di una indistinguibilità del minimo arco di circonferenza dal minimo segmento di retta; un corollario della dimostrazione era l'esistenza in atto di un'infinità di oggetti distinti. Così egli argomentava: in un cerchio è possibile inscrivere un poligono regolare con un numero di lati arbitrariamente grande; inoltre è possibile costruire un quadrato di area uguale a quella di un qualsiasi poligono regolare. Se allora si aumenta indefinitamente il numero dei lati del poligono inscritto nella circonferenza, ogni lato si approssima sempre più all'arco sotteso, e l'area compresa tra il poligono e la circonferenza si riduce fino ad assumere una grandezza arbitrariamente piccola. È possibile a questo punto concludere che il poligono si identificherà alla fine con il cerchio e che i suoi lati saranno tanto piccoli da poter essere considerati come archi, se pur minimi, della circonferenza? Antifonte sosteneva che ciò è certamente possibile. Un arco minimo di circonferenza non si distingue da una minima porzione di linea retta, e quindi un poligono regolare con un numero infinito di lati non si distingue da una circonferenza. Poiché è costruibile un quadrato

equivalente a un poligono regolare con un numero qualsiasi di lati, comunque grande sia questo numero, e poiché un poligono i cui lati non si distinguano dagli archi di una circonferenza è da ritenersi uguale a questa circonferenza, Antifonte concludeva che una quadratura del cerchio è possibile.



Argomentazioni di tal genere non ottennero in realtà molto credito e si preferì attenersi, nelle linee principali della speculazione matematica e metafisica, all'unico significato consentito al termine ἄπειρον: quello potenziale. Aristotele contribuì autorevolmente a questa soluzione sostenendo la completa infondatezza delle ragioni invocate da Antifonte.

L'insieme dei poligoni inscritti nella circonferenza è evidentemente un insieme illimitato, nel senso che, per ogni poligono con un numero arbitrariamente grande di lati molto piccoli, esiste un poligono successivo con lati ancora più piccoli, che a sua volta non coinciderà con la circonferenza ma ammetterà dopo di sé un ulteriore poligono: chiarissima esemplificazione dell'enunciato aristotelico che descrive l'infinito come qualcosa al di là della quale si trova sempre qualche cosa d'altro.

Allo stesso modo in cui l'illimitato, cioè l'ἄπειρον, non ammette alcun termine finale ma solo un indefinito sviluppo, l'insieme dei poligoni non può comprendere un termine conclusivo che coincida con la circonferenza. Se ciò avvenisse si ammetterebbe allora implicitamente l'esistenza attuale dell'infinità dei poligoni; ma ciò è assurdo, poiché l'ἄπειρον sarebbe in tal caso un infinito attuale e il suo intrinseco significato, legato tradizionalmente alla negazione, alla privazione e alla potenzialità, risulterebbe compromesso e ingiustificatamente alterato. In realtà, sosteneva Aristotele, i matematici non hanno alcun bisogno di introdurre grandezze attualmente infinite nelle loro dimostrazioni, e ciò non pregiudica affatto la possibilità di successo dei loro studi. Nell'esempio descritto è sufficiente ammettere che è possibile, dato un qualsiasi poligono inscritto, trovarne un altro con i lati più piccoli, ovvero che è possibile ridurre l'area residua tra

poligono e cerchio a una grandezza arbitrariamente piccola senza pretendere di introdurre il concetto problematico di un insieme attualmente infinito di poligoni.

Che il riconoscimento dell'inesauribilità dell'infinito non compromettesse i risultati di molte dimostrazioni matematiche fu in realtà esaurientemente provato alla fine del secolo scorso da Weierstrass nell'ambito di una riformulazione rigorosa dei principi dell'analisi. Fu allora dimostrato non solo che l'infinito poteva essere, senza alcun danno, inteso nel senso potenziale, ma che l'allusione a tale potenzialità poteva essere rimossa, o comunque dissimulata, mediante un linguaggio matematico che alludesse a quantità semplicemente finite, ed eliminasse addirittura l'uso esplicito del termine infinito.

Prescindendo da alcuni aspetti non perfettamente ortodossi delle dimostrazioni euristiche del *Metodo* di Archimede, il punto di vista aristotelico rimase rispettato, nella sostanza, nei procedimenti geometrici di Eudosso, dello stesso Archimede, e di Euclide. Il così detto metodo di esaurimento di Eudosso fa uso dell'infinito nell'unico modo previsto da Aristotele, evitando cioè ogni considerazione che faccia riferimento ad una sua presunta esistenza attuale.

Ma proprio l'esame di questi metodi finisce per consentire l'apertura ad una diversa concezione dell'infinito.

Convien, per questo, ripensare provvisoriamente agli argomenti di Antifonte. In essi interviene una successione di poligoni che non è ciecamente illimitata; essa è orientata, pur nell'illimitatezza, verso un fine rappresentato dalla circonferenza. Nei poligoni è ravvisabile quindi una sorta di ordine teleologico di cui la circonferenza circoscritta è in qualche modo la causa finale irraggiungibile. La circonferenza è un limite che 'comprende' la successione illimitata dei poligoni pur non costituendone un termine effettivo; essa costituisce comunque una soluzione all'indefinita potenzialità di sviluppo della successione pur situandosi *al di fuori* di quest'ultima.

Ciò vuol dire che è possibile configurarsi concretamente la soluzione finale di un processo illimitato, pur non rinunciando al carattere potenziale di quest'ultimo: l'inesauribilità dell'illimitato resta un fatto irrinunciabile, ma non costringe per questo ad accontentarsi di una semplice approssimazione di ciò che si vuole raggiungere.

Pur non uscendo mai dal finito, ed essendo anzi di quest'ultimo nient'altro che un'incessante ripetizione, l'illimitato può indicare qualcosa che lo trascenda, prospettare questa trascendenza come segno caratteristico di una completezza attuale e infinita e di conseguenza evocarne o rifletterne per trasposizione analogica l'intima natura.

Si pensi ad esempio alla somma di una qualsiasi serie infinita convergente: si tratta ivi di un limite concretizzabile in un ente

matematico ben definito che non appartiene tuttavia alla successione indefinita delle somme parziali che tendono ad esso. Il limite non è un termine della successione e non è perciò una semplice approssimazione del risultato che si vuole conseguire; esso è raggiunto rinunciando all'analisi indefinita della successione che lo precede e ponendosi in un punto di riferimento esterno che è invisibile a chi si soffermi alla pur corretta constatazione della sua indefinita lontananza e irraggiungibilità. Qui si è evidentemente a un passo da un modello di rappresentazione ideale di ogni ordine teleologico del mondo che comporti un «regressus in infinitum» delle cause risolubile solo nel postulare una causa finale attualmente infinita e insondabile per l'ordinaria sensibilità. Scrive Aristotele¹ che la causa finale rappresenta un fine di tal natura da non essere condizionato da altro, ma da condizionare esso stesso l'esistenza delle cose; se esiste un tale elemento finale la progressione all'infinito avrà una sua soluzione, e chi postula l'infinità incondizionata di ogni serie illimitata mette in crisi la stessa nozione di Bene.

Nella geometria di Eudosso e Archimede si vede qualcosa di simile alla soluzione finale di un processo illimitato; ciò che se ne ricava è tuttavia un'intenzione peculiare e irripetibile, forse non sufficientemente assimilata dalle tecniche del «passaggio al limite», analoghe in un certo senso al metodo di esaustione, che avrebbero fatto la loro apparizione nelle opere di Cauchy e di Weierstrass molti secoli dopo. Il linguaggio di Cauchy sarebbe stato ancora ricco di allusioni all'infinitesimo; quello di Weierstrass l'avrebbe evitato, ma sarebbe stato in grado di delineare una teoria in cui H. Weyl scorse il preludio alla nozione matematica dell'infinito attuale.

Nelle dimostrazioni per esaustione di Eudosso si trovano dissimulati i significati dell'infinito senza che questo risulti mai nominato. A cominciare dal postulato di Archimede,² che stabilisce quali sono le grandezze fra cui si può stabilire un rapporto, e perciò un'armonia limitante, si procede poi per assurdo, dimostrando che la falsità della tesi implicherebbe l'esistenza di grandezze infinitesimali, non archimedee. Ad esempio per dimostrare la proporzionalità tra due cerchi C , C' e i quadrati costruiti sui loro diametri d e d' si ipotizza l'assurdo di una proporzione $d^2 : d'^2 = C : X$ ove X è diverso da C' . Utilizzando poi l'indefinita riducibilità dell'area compresa tra un cerchio e i successivi poligoni inscritti (in un'apparente conformità ai metodi di Antifonte), si trova che X deve essere uguale a C' per il solo fatto che la differenza tra X e C' risulta più grande dell'area compresa tra C' e un poligono inscritto con un sufficiente numero di lati. Se non fosse possibile trovare un tale poligono il postulato di Archimede sarebbe falso e bisognerebbe dedurre che la proporzione ipotizzata per assurdo è vera solo al patto che X

differisca da C per un infinitesimo. Tuttavia nel corso della dimostrazione l'infinitesimo non è mai nominato; e neppure la proporzionalità tra i cerchi e i quadrati costruiti sui diametri è indicata in modo esplicito come il limite di un processo illimitato di configurazioni intermedie applicate a poligoni.

Molto più tardi, specialmente a partire dalla prima fondazione dell'analisi, si sarebbe tentato di indicare in modo esplicito l'infinito con 'qualcosa', fosse indifferentemente un differenziale, un numero transfinito o un punto all'infinito sul piano complesso: Leibniz, Bolzano, Cantor si sarebbero adoperati a questo scopo nella convinzione che la matematica offrisse l'opportunità di rappresentare questo 'qualcosa' come oggetto contrassegnato da un'incontrovertibile evidenza, e suscettibile per di più di essere manipolato come segno tangibile dalla meccanica algebrica. Questo tentativo riuscì però solo in parte, e fu lasciata intatta l'opinione che ciò che si voleva rappresentare era destinato a un'irriducibile impenetrabilità.

I Greci preferirono invece designare questa impenetrabilità con l'assurdo, facendone l'inaccettabile alternativa di dimostrazioni orientate a riconoscere rapporti armonici e proporzioni finite. Se i quadrati e i cerchi della precedente dimostrazione non fossero proporzionali esisterebbe l'infinitesimo: questo è il succo dell'argomento e l'implicito riconoscimento della negatività dell'infinito.

Eppure nella ricerca dei «centri di gravità» delle configurazioni geometriche di Archimede era ancora adombrato il senso di una risoluzione finale dell'illimitato. Il risultato di ciò che appariva riducibile, nel linguaggio moderno, ad una integrazione, e cioè il calcolo di un'area o di un volume, veniva ricondotto all'esistenza di un *punto* di equilibrio della massa geometrica. Se si ripensa ad esempio al calcolo archimedeo dell'area di un segmento parabolico, tutto viene ivi ricondotto all'esistenza di un centro di equilibrio tra un triangolo e detto segmento trasferito in una regione opportuna del piano. Questo centro di gravità, capace di annullare, se sostenuto, gli sbilanciamenti provocati dal peso, esercita il suo potere di equilibrio sulla infinità dei segmenti rettilinei di cui si può immaginare 'composto' rispettivamente il triangolo e il segmento parabolico.

Per questa funzione equilibratrice procede, da un punto, il bilanciamento di due aree, e, in ultima istanza, la scoperta di una perfetta armonia di rapporto tra l'area del segmento parabolico e l'area del triangolo inscritto: l'uno è $\frac{4}{3}$ dell'altro.

Il significato da meditare è allora tutto nella circostanza del riferimento ad un punto di un'infinità di segmenti rettilinei, e nel fatto che un punto geometrico, definito negativamente da Euclide come ciò che non ha parti, è in definitiva un 'nulla' e un 'nonsenso'. Proclo scrisse che la definizione euclidea riproduce

l'intenzione di Parmenide di descrivere i principi mediante proposizioni negative. Un principio è infatti di natura diversa da ciò che da esso procede, e la negazione degli effetti fa meglio capire l'essenza di quello che li trascende. Il punto tuttavia 'esiste' ed è il sostegno della struttura ordinata dell'apparenza visibile: la ragione è che in esso è racchiuso un rapporto, una mediazione armonica tra due infinità di segmenti; ma ogni mediazione armonica non è altro che un limite, e il limite, avrebbe spiegato Plotino, è proprio quella cosa che fa riconoscere, in ciò su cui esercita la propria funzione di confine delimitante, la natura dell'infinità. «Anche se essa [l'infinità] è delimitata» si legge nella *VI Enneade* (6, III, trad. it., Bari, 1973, vol. III, parte prima, p. 288) «essa è proprio per questo infinita; in realtà, non viene delimitato il limite ma l'infinito; poiché, di certo, non vi è qualche altra cosa tra finito e infinito che possa accogliere la natura del limite». La singolare mistione di potenzialità e insieme di capacità limitante del punto, la sua esistenza operativa come centro di rivoluzioni stellari e perno di movimenti immutabili unita all'immobilità e identità della sua sostanza furono descritte da Proclo nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* (1,85-96). Il punto è un limite, scrive Proclo, eppure possiede l'illimitato in modo latente, e per questo lo troviamo ovunque nella geometria. Esso è il confine decisivo delle figure perché regge la catena dei successivi rimandi dell'illimitato a ciò che lo argina e contiene: un corpo è delimitato da una superficie, una superficie da una linea e infine una linea dal punto. Alla sua forza conciliatrice e insieme efficace e propulsoria compete anche la sfera del magico; ed è per questo che Proclo attribuisce ai centri di tutte le sfere l'attitudine a imitare simbolicamente la natura del dio incantatore e illusionista, da cui procede ogni «solve et coagula», ogni moto di espansione e successivo riassorbimento lungo i raggi che procedono dal polo centrale alla periferia. Per inciso, questo polo geometrico della ruota magica del cosmo cui allude Proclo (con il termine ὑψι, ὑψυκός) fa pensare all'immagine di cui si sarebbe servito molti secoli più tardi R.W. Emerson nei suoi *Essays* per descrivere il carattere circolare della vita dell'anima. Questa procede da un anello iniziale impercettibilmente piccolo, infinitesimo, allargandosi in profondità in successive ruote concentriche, su ognuna delle quali l'uomo si erge ogni volta a delimitare e solidificare il proprio *status* provvisorio:

Nature centres into balls,
and her proud ephemerals,
fast to surface and outside,
scan the profile of the sphere...

Meno di un secolo dopo Hofmannsthal avrebbe scritto che

«nulla esiste a sé» e che «tutto si compie in circoli». Ma al contrario di Emerson avrebbe narrato in *Andreas oder die Vereinigten* l'iter iniziatico di una ricongiunzione con il centro; un viaggio a ritroso attraverso gli incantesimi del dio per un ritorno alla sua dimora: il punto o 'luogo geometrico' ove si rinsaldano tutte le esperienze divergenti; l'unità ove sono riassorbite le separazioni e la maturità si riconcilia con lo stato infantile. «La vera matematica» scrisse Novalis³ «è l'elemento vero e proprio del mago».

Ove incontra un punto che lo limita un illimitato è perciò suscettibile di mutare la propria natura, di prefigurarsi come tensione orientata, postulante un'attualità che la preceda. Sorge così l'opportunità di distinguere, di considerare nient'affatto definitiva l'equivalenza di tutti gli illimitati sotto l'egida della στήρησις o della ὅλη.

C'è un classico esempio ove sorge l'opportunità di distinguere diverse forme di infinito: il primo argomento di Zenone contro il moto. In tale argomento si sostiene che chi desideri percorrere una unità di lunghezza non potrà mai portare a compimento la sua impresa, perché dovrà percorrere la successione infinita di intervalli in cui l'unità è divisibile per dicotomia. Chi voglia arrivare a 1 partendo da 0 dovrà prima raggiungere $1/2$, poi $3/4$, poi ancora $7/8$, e così di seguito, percorrendo successivamente gli intervalli spaziali di lunghezze (a): $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ..., $1/2^n$, ...; e ciò appare manifestamente impossibile, perché tali intervalli sono in numero infinito.

La realtà dei fatti vuole però che chi viaggi a una velocità costante percorra l'unità di lunghezza entro un tempo finito. Viaggiando a una velocità unitaria, senza accelerazioni, la successione di intervalli (a) viene infatti percorsa in una successione di intervalli temporali di lunghezze (b): $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ..., $1/2^n$, ..., che è ancora infinita; ma poiché la somma parziale ($1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^n$) tende a 1 per n tendente a infinito, il tempo totale di percorrenza non può superare l'unità.

Con la nozione matematica di limite si può dunque pensare di disporre di una sorta di soluzione del paradosso, risolvendo l'indefinitezza dell'ἄπειρον, che renderebbe inesauribile la serie (a), in un'entità totale, formalmente compiuta, qual è l'avvenuto percorso dell'unità di lunghezza nell'unità di tempo. E questa è anche una proprietà caratteristica del limite, quale fu definito nell'800, soprattutto da Weierstrass. Pur conservando in sé l'idea di un processo e di una potenzialità illimitata il limite ha il potere di risolvere tale potenzialità in un'unità formale; sicché è vero ciò che afferma H. Weyl:⁴ che è ingannevole l'apparenza per cui il processo al limite sembra mutare definitivamente l'Essere in Divenire.

La dimostrazione di Zenone sembra tuttavia invulnerabile, nella sua *intenzione* ancor più che nel suo specifico svolgimento

dialettico, da ogni confutazione che faccia uso del limite. Essa introduce un metodo generale di riduzione all'assurdo che fu ripreso anche da chi si preoccupò di neutralizzarne l'efficacia. Non senza ironia, c'è da supporre, Borges rammenta che fu proprio Aristotele a smontare con sdegnosa brevità gli argomenti di Zenone, ma per usarne poi il paradigma allo scopo di confutare Platone. Una volta entrati nella sfera dell'enigma è difficile sottrarsi all'impressione che ogni argomento dotato di apparente coerenza si rovesci in errore. «La verità è un errore completo» scrisse Novalis⁵ «come la salute è una completa malattia», ed è questo l'inevitabile corollario di una costante correlazione tra essere e apparenza, tra realtà e sogno. «L'apparenza» scrisse S. Weil⁶ «ha la pienezza della realtà, ma in quanto apparenza. In quanto altra cosa che apparenza essa è errore». Viene così da supporre che Zenone avesse inteso principalmente *questo* appellandosi al potere dissolvente dell'ἄπειρον per dimostrare la natura contraddittoria del moto. Come immagine speculare negativa dell'esemplare celato al di là di ogni rappresentazione l'ἄπειρον poteva essere allora un paradossale richiamo simbolico a Dio, allo stesso modo che la negazione dell'effetto, come aveva scritto Proclo del punto, è la migliore descrizione della peculiarità del principio che lo sostiene. L'idea potrebbe estendersi oltre, al male e al non-essere, fino a farne la prova del fatto che un mondo privo di Dio ne indica da lontano la presenza: i primi esempi che si ricordano sono *Il Libro di Giobbe*, Dostoevskij, S. Weil. Più vicini a Zenone sono gli argomenti di Nāgārjuna, nelle *Madhyamaka kārīkā*, a dimostrazione della contraddittorietà insita nel movimento.

Molte tra le confutazioni ai paradossi di Zenone si appellano comunque, in ultima analisi, al principio del limite e alla intuibilità di fatto, nell'esperienza concreta (in cui sempre interviene il principio formale limitante), di ciò che risulta imprevedibile solo in virtù di un'analisi sofisticata escogitata a posteriori. Così osservò Simplicio: «Se fosse qui Zenone gli diremmo che l'uno in atto non è molteplicità; infatti l'unità gli appartiene propriamente, la molteplicità invece potenzialmente; così allora la stessa cosa risulta una e molteplice; ma in atto essa possiede solo una delle determinazioni, mentre tutte e due non le possiede mai».⁷

Recentemente A. Grünbaum⁸ ha dimostrato che l'applicazione della teoria aritmetica dei limiti alla risoluzione del paradosso è giustificata dalla struttura metrica del tempo fisico. La coscienza umana del tempo ammette un limite inferiore di percettibilità, ovvero una soglia minima al di là della quale gli intervalli temporali svaniscono in una piccolezza inimmaginabile. Se si tentasse una indefinita contemplazione cosciente di «tutti» gli intervalli della successione (*a*), questa si realizzerebbe allora concretamente in un'infinità numerabile di atti mentali, e la

durata di ciascuno di essi sarebbe maggiore, in grandezza, della soglia minima di tempo consentita; ma questo 'minimum' insuperabile è una quantità archimedeo: sommato a se stesso infinite volte dà un risultato infinito; quindi la contemplazione mentale dell'intera successione si risolverebbe nell'impossibilità di un periodo illimitato di tempo. Ciò accadrebbe, ad esempio, se si 'contassero' uno ad uno gli intervalli (a), associando a ciascuno di essi un numero d'ordine che richiederebbe, per il solo fatto di essere concepito (o pronunciato), un tempo maggiore del minimo richiesto (ma è assurdo, aveva detto Aristotele,⁹ ritenere che ciò che si muove si muova contando). Zenone, sollevando il dubbio sulla percorribilità dell'intervallo $(0,1)$, approfitta in realtà di quell'illecito indugio che è implicito nella riduzione della successione (a) ai corrispondenti atti mentali del processo di contare, non rivelando la circostanza che tale processo non riproduce esattamente la metrica del tempo fisico collegato all'effettivo percorso.

Così, per Grünbaum, l'argomento di Zenone è illegittimo perché utilizza quella che in fondo è un'inevitabile confusione tra due forme incompatibili del pensiero; noi non sperimentiamo, egli spiega, i sottointervalli in cui dividiamo l'unità del percorso come trascorrenti in una forma metricamente corrispondente alla loro natura. Piuttosto ricaviamo l'impressione della loro durata dal tempo di svolgimento dei nostri atti di contemplazione mentale, che, per ogni frazione di percorso, non può non stare al di sopra di una soglia o di un limite minimo. E questa impressione si sovrappone indebitamente ai tempi elaborati da un atto analitico di pura astrazione intellettuale, che prescinde totalmente dall'osservabilità e dall'accessibilità sperimentale. Immaginare di percorrere un intervallo indefinitamente piccolo vuol dire allora scontrarsi con la *finzione*, ovvero con ciò che trascende gli schemi di una diretta rappresentabilità dell'evento governata dal principio del *limite*. Eppure è proprio la *finzione*, cioè in definitiva quello che non c'è, ad affacciarsi nell'analisi dell'accadimento, di ciò che si presenta come fatto certo e incontrovertibile. Questo fatto è in realtà descrivibile con lo stratagemma aritmetico del «passaggio al limite», con cui si aggira il rischio di pensare uno per uno gli intervalli (a) cadendo nell'errore di confondere due durate incompatibili; ma è pur vero che si tratta di un ponte gettato sul nulla e si ha l'incancellabile impressione che sia proprio questo *nulla* a 'formare' l'evento: se l'intenzione principale di Zenone era quella di svelarlo dietro l'apparenza del limite, i suoi argomenti avrebbero scarsa intersezione con quelli di Grünbaum.

L'esistenza di una soglia di osservabilità è del resto un postulato più o meno esplicito nella fisica o nella psicologia della percezione. La meccanica quantistica ne attesta l'inevitabilità. Come testimoniano M. Born, L. Brillouin, K. Popper, nella stessa

meccanica classica sono definibili modelli il cui comportamento è innegabilmente indeterministico e questa circostanza, osserva Walter Hoering,¹⁰ poggia sul fatto certo che ogni misura ha un grado solo finito di esattezza e anzi un probabile limite inferiore *assoluto* di precisione possibile. E anche la nostra più riposta predisposizione mentale richiede questo limite. L'osservazione polemica di E. Schrödinger¹¹ sul perdurare, pur dopo l'affermarsi del principio di sovrapposizione, di certa terminologia intrinsecamente legata alla concezione di *stati stazionari* di energia e a scambi finiti di «quantità» energetici non potrebbe anche significare una naturale tendenza a pensare in termini di definite configurazioni persistenti in un sia pur minimo tempo?

Anche Aristotele¹² sostenne l'esistenza di un intervallo di tempo minimo necessario al compimento di una qualsiasi azione (e si può probabilmente aggiungere anche di una qualsiasi operazione mentale): non si può infinitesimalizzare la vita concreta se non al rischio di incorrere nell'assurdo.

L'obiezione principale di Aristotele a Zenone fu però la distinzione tra infinito per addizione e infinito per divisione.¹³ Se si considera un'unità di lunghezza e la si addiziona a se stessa infinite volte si ottiene certamente una distanza illimitata non percorribile in un tempo finito. Ma se ci si prefigura l'illimitato secondo un procedimento in qualche modo opposto, cioè dividendo per dicotomia l'unità di lunghezza in infiniti intervalli, ecco che l'infinità può considerarsi in qualche modo esauribile entro un intervallo limitato di tempo.

L'infinità dei sottointervalli in cui è divisibile l'unità di lunghezza ha questa rilevante caratteristica: essa è interamente contenuta in una totalità limitata che può costituire l'oggetto di un'intuizione empirica. Così una materia assegnata entro i limiti di un corpo finito è visibile e tangibile nella sua interezza, pur implicando l'impossibilità di un'analisi esauriente di tutte le sue componenti.

I. Kant (*Dial. trasc.*, II, 2, sezz. 8-9) rilevò la distinzione tra «progressus in infinitum» come tipicamente esemplificabile negli infiniti per divisione di una totalità empiricamente intuibile e «progressus in indefinitum», che non conosce limitazione di sorta se non quella, provvisoria, che gli può essere assegnata ad ogni suo passo, prima di trascorrere al passo successivo.

Riducendo per dicotomia un segmento unitario in parti sempre più piccole, anche gli elementi più lontani della divisione sono in realtà già assegnati e presenti nel tutto ancor prima che questa stessa divisione abbia inizio. La loro esistenza è scontata: essa è già implicita nell'appartenenza a una forma limitata da cui non possono sfuggire e in cui possono essere rinvenuti nel corso di un processo da cui fatalmente ciascuno di essi è raggiunto.

La conclusione è opposta quando si pensi a un'altra infinità: quella dell'Universo. In questo caso non esiste una totalità

empiricamente intuibile che contenga ogni oggetto della serie infinita; questa procede per successive aggiunzioni di oggetti appartenenti a un ambiente che si pone perennemente all'esterno di ciò che è già stato unificato dall'intuizione.

Nel primo caso, scrive Kant, gli elementi successivi dell'insieme infinito vanno «trovati» in un tutto preesistente. Nel secondo caso vanno «cercati» al di fuori della totalità parziale, sempre finita, che non si cessa mai di ottenere. Ambedue sono infiniti essenzialmente potenziali, ma il «progressus in infinitum» ha il privilegio di ammettere un limite che lo avvolge, e in ciò è adombrata la natura di ogni vera infinità, che non è mai uno sviluppo incondizionatamente illimitato, ed è sempre riferibile a un ordine formale, limitante. L'altra infinità, quella della grandezza dell'Universo, spesso non fu considerata come tale: la ripetizione del finito, in cui consiste, può essere messa in conto appunto di ciò che è finito, e non di ciò che è infinito. Keplero asserì con decisione, e non senza usare argomentazioni convincenti, che l'Universo è finito.

Una sorta di compromesso, di singolare attenuazione della distanza tra infinito per divisione e infinito per aggiunzione è stato tentato ancora da A. Grünbaum che ha costruito sull'esempio di Zenone un modello puramente cinematico di macchina capace di portare a compimento un'infinità di operazioni in un tempo finito. Egli ha ottenuto questo modello ipotizzando una corsa per i successivi intervalli $1/2$, $1/4$, $1/8$... che *si interrompesse* all'estremo superiore di ciascun intervallo: una corsa cioè intermittente, con un infinito numero di pause d'arresto di durata sempre più breve ($1/4$, $1/8$, $1/16$... dell'unità di tempo) tali che il tempo totale di percorso non superasse quello della corsa «continua». Gli evidenti problemi di discontinuità pertinenti soprattutto alle accelerazioni per raggiungere il desiderato livello di velocità negli infiniti intervalli non hanno impedito a Grünbaum di lasciare intravedere una compatibilità, una possibile riuscita dell'intento. Beninteso sul piano esclusivamente cinematico, essendo fin dall'inizio prevedibile che l'energia spesa per tali accelerazioni da un eventuale corridore intermittente non possa che essere assurdamente infinita.

Una corsa interrotta e ripresa un'infinità di volte dà indubbiamente l'idea, suggerisce Grünbaum, di una infinità di operazioni staccate, indipendenti l'una dall'altra e successive nel tempo, cui non si può imputare di essere il risultato di un'*analisi* di qualche preesistente percorso unitario e ininterrotto. Si tratta di un controesempio, con la dovuta esclusione di complicazioni *dinamiche*, della presunta assurdità di un insieme infinito di cose fatte in un tempo finito; un tentativo avanzato di capovolgere il *regressus in infinitum* nell'affermazione positiva dell'*essere*, di tramutare l'assurdo nel ragionevole, la finzione in realtà. Un

tentativo non impossibile se visto nella prospettiva della già menzionata affermazione aristotelica dell'esistenza del Bene in contrapposizione all'incolmabilità delle serie illimitate, e dei successivi più espliciti argomenti di san Tommaso o di Leibniz. Un proposito forse incommensurabile, tuttavia, con le più probabili intenzioni di Zenone.

Eppure proprio il *regressus in infinitum* delle cause efficienti di san Tommaso dimostra, forse ancora una volta in sintonia con Zenone, come l'atto supremo emerga dall'assurdo, e come sia proprio l'*assurdo* a procurare quei rovesciamenti di prospettiva che conducono ad ogni tipo di trascendenza. Negli argomenti di Grünbaum, o di chi prima di lui provò con analoghi espedienti a confutare Zenone, è assente ogni allusione alla priorità dell'assurdo e alla sua forza dimostrativa; prevale invece una fiducia diretta nella realtà e legittimità della forma e nella sua vittoria finale sull'illimitato, fino al punto di estendere quanto possibile quella insopprimibile urgenza o necessità metafisica che A.O. Lovejoy chiamò «principio di pienezza» fino alle soglie di una completezza formale prossima all'infinità. Del resto anche san Tommaso introdusse l'assurdo solo per sopprimerlo subito dopo, in nome del fatto e dell'evidenza.

L'attualità e il limite fornirono in ogni tempo il presupposto irrinunciabile di ogni teoria della conoscenza, la stessa essenza discriminante del pensiero, l'irrinunciabile criterio di ogni ordinamento concettuale e attività d'astrazione. Gli elementi limitanti, aveva scritto Proclo nel *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, prevalgono solitamente sulle cose limitate (cioè sull'illimitato), essendo in fondo più uniformi, più indivisibili e anche più antichi; e san Tommaso avrebbe ripetuto: «Intellectus noster per prius intellegit indivisibile quam divisibile». ¹⁴ In tal senso si può ben dire che l'asserzione aristotelica per cui nulla esiste di fatto che sia illimitato (intendendo a priori l'*ἄπειρον* come materia e potenzialità) rimase sempre fondamentalmente inattaccabile.

Anche in chi, come G. Bruno, sembrò (a torto) confondere l'indefinitezza dell'*ἄπειρον* con la vera infinità, ¹⁵ non andò persa la priorità dell'attuale sul potenziale. Scrisse appunto G. Bruno che l'intelletto astratto (logico) è libero di dividere indefinitamente una data grandezza o di formarne un'altra col discorso; ma non può credere che i suoi prodotti siano conformi alla natura delle cose, perché il processo dell'intelletto è «pura finzione» (« *fingere de nihilo*»). ¹⁶ Il fondamento reale del continuo era da cercarsi, per Bruno, non con la facoltà discorsiva dell'immaginazione astratta, che si prefigura indefinitamente divisibile una qualsiasi estensione, ma con l'*intelletto*, ovvero con la *mens tuens*, che giunge là ove non arriva alcun progresso illimitato. ¹⁷ Il 'minimum' indivisibile non era certamente il risultato di un ultimo passo raggiunto nel processo immaginario

di una serie illimitata; la vera infinità in esso raffigurata assomigliava a quella simboleggiata dai «centri di gravità» di Archimede, e partecipava perciò della natura del rapporto e quindi del limite, vera e unica premessa e sostanza del reale. E nulla escludeva che il limite fosse rappresentabile come un minimo geometrico, come un punto o come un infinitesimo, qualora una di queste entità fosse in grado di indicare un'essenza qualitativa o un rapporto. «Un limite» intuì S. Weil «è un infinitamente piccolo. Il limite è la presenza, in un ordine, sotto forma dell'infinitamente piccolo, dell'ordine trascendente. Il limite è trascendente in rapporto a ciò che esso delimita».¹⁸ Questo limite, appunto, vollero rappresentare i minimi geometrici di G. Bruno, e in essi non c'è traccia dell'illimitata divisione del continuo.

L'esclusiva intelligibilità di ciò che è attuale, ed è dunque regolato dal principio del limite, fu riconosciuta sotto diversi angoli visuali, in epoca moderna, da filosofi come Cartesio, Hume, Whitehead, W. James, Wittgenstein.

Cartesio osservò che le figure che appaiono in sogno, come gli oggetti 'reali' cui esse somigliano, sembrano potersi riferire a forme e modalità di esistenza più semplici e più generali cui è difficile negare un attributo di realtà e autenticità. Tali sono la natura corporea in generale, la sua estensione, la figura dei corpi estesi, la loro grandezza e quantità, il tempo e lo spazio in cui sono immersi.

Whitehead scorse in questi punti di riferimento primari, che Cartesio chiamava «res verae», la prima realizzazione della potenzialità atemporale e astratta che precede la formazione del mondo; un insieme di irriducibili entità attuali al di là delle quali esiste solo la sterile separazione dell'assoluta potenzialità, cioè del nulla.¹⁹

«Quando percepiamo un attributo» aveva scritto Cartesio «concludiamo che qualche cosa di esistente, o qualche sostanza, alla quale esso possa essere attribuito, è necessariamente presente», poiché «ogni percezione chiara e distinta è senza dubbio qualcosa, e perciò non può far derivare la sua origine da ciò che è nulla...».²⁰

Whitehead vide nelle *Meditazioni* di Cartesio una conferma del principio aristotelico secondo cui nulla esiste se non ciò che è attuale. Ma ciò che appare in un istante come attuale comporta una separazione, cioè un taglio da ciò che in quell'occasione attuale non è, perché non presente come un 'dato' della coscienza; e questa separazione è una sorta di limitazione esclusiva, cioè semplicemente un limite, che ritrova anche come proprio opposto complementare la potenzialità illimitata. Ciò che è dato avrebbe anche potuto non essere e ciò che non è dato avrebbe potuto essere: per il «principio ontologico» enunciato da Whitehead «ogni cosa esiste positivamente come entità attuale

da qualche parte e potenzialmente dappertutto».²¹

Hume cercò un fondamento e un sostegno della vaghezza delle impressioni sensoriali, da cui fece derivare l'intera attività intellettuale, nel presunto riconoscimento di entità attuali irriducibili. Nel *Treatise* (1,2) egli riconobbe infatti in primo luogo che la capacità della nostra mente non è illimitata e che non può dunque esaurire l'indefinito percorso di un infinito potenziale: essa non ha una «piena ed adeguata concezione dell'infinito», perché quando lo incontra si trova costretta a seguirne gli interminabili passi successivi secondo l'inesorabile legge del divenire che non lascia sperare in alcuna definitiva soluzione del processo.

È per questo, suggerisce Hume, che la divisione delle idee deve arrivare a un termine ultimo e che l'immaginazione «deve poter raggiungere un "minimum", e dare a sé un'idea, della quale non si possa concepire suddivisione, e che non possa esser diminuita senz'essere totalmente distrutta». Si può legittimamente parlare della millesima o decimillesima parte di un granello di sabbia riuscendo a formarsi un'idea distinta di tali numeri e delle loro proporzioni; ma le immagini che la mente riesce a formarsi del granello iniziale e delle parti in cui lo suddivide non sono affatto differenti l'una dall'altra: le loro diverse grandezze non alterano la qualità dell'immagine, che resta invariabilmente quella di un granello di sabbia. La conclusione è evidente: «l'idea di un granello di sabbia non è divisibile né separabile in venti, e ancor meno in mille, diecimila o un infinito numero di differenti idee».²²

Hume propose anche un facile esperimento: si prenda una macchia di inchiostro sulla carta e ci si allontani tenendo gli occhi fissi su di essa; a un certo punto la macchia diverrà invisibile per la troppa distanza, ma quando starà per sparire risulterà ancora visibile come «minimum» puntuale e indivisibile: come per le idee dell'immaginazione è dato un ultimo termine concepibile, egli scrisse, così per le impressioni sensoriali si passa dal nulla a una minima attualità percepibile e irriducibile a parti più piccole.

Il carattere formale e limitato di ogni esperienza fu anche visto sotto l'aspetto di una 'atomizzazione' della realtà, in cui entra in gioco una sorta di 'decisione' conscia o inconscia, che separa ciò che è dato da tutto ciò che questo dato non è: «decisione», rammenta Whitehead, vuol dire anzitutto taglio e separazione. Musil, in *Der Mann ohne Eigenschaften*, spiegò come «dopo tutto l'oggetto esiste soltanto mercé i suoi limiti, e quindi in forza di un atto in qualche modo ostile verso l'ambiente che lo circonda» sicché «è innegabile che la più profonda forma di associazione dell'uomo con i suoi simili è la dissociazione».²³

L'atomizzazione si manifesta fin dalla percezione del carattere puramente spaziale o temporale di ogni esistenza: essa si

concretizza primordialmente nei ritmi e nelle 'epoche' temporali, nei volumi e nelle forme spaziali degli oggetti che si muovono nel tempo.

W. James arrivò, come Hume, alla soglia estrema dell'esistenza come attualità, indicando, dietro questa, il nulla. «O la vostra esperienza» egli scrisse «non è di nessun contenuto e di nessun mutamento, oppure essa consiste di una percettibile porzione di contenuto e di mutamento. Il vostro apprendimento della realtà procede letteralmente per via di semi e stille di percezione. Intellettualmente e indirettamente potete dividerle in componenti; ma in quanto date immediatamente esse si presentano nella loro interezza, oppure non si presentano affatto».²⁴

Gli «oggetti semplici» di Wittgenstein rispondono anch'essi alla esigenza della priorità dell'attuale: essi sono delle entità primarie non scomponibili se non al prezzo di una «insensata» frantumazione del «senso» della proposizione in cui compaiono. Usando le parole di Wittgenstein: «La complessità di un oggetto, se è determinante per il senso di una proposizione, deve essere raffigurata nella proposizione nella misura in cui determina il senso della proposizione. E, nella misura nella quale la composizione *non* è determinante per *questo* senso, in questa misura gli oggetti di questa proposizione sono *semplici*. Essi non *possono* essere scomposti ulteriormente», sicché «l'esigenza delle cose semplici è l'esigenza della determinatezza del senso».²⁵

Ogni proposizione appare quindi perfettamente articolata in parti semplici,²⁶ ed è perciò perfettamente sensata, anche quando sussiste una sua indefinita scomponibilità teorica, implicita in quel grado di generalità e vaghezza che costituisce tuttavia la sua «forma», cioè in definitiva il suo limite. «Se io dico, ad esempio, che quest'orologio non è nel cassetto, non è affatto necessario che da ciò *segua logicamente* che una rotella, che è nell'orologio, non sia nel cassetto, infatti forse *io non sapevo affatto* che la rotella era nell'orologio, e quindi, per "quest'orologio", non ho neppure potuto intendere un complesso ove la rotella occorre».²⁷ Equivalentemente «se io noto che una macchia è tonda, non noto allora una proprietà strutturale infinitamente complessa?». Ma il fatto è che «una proposizione... può ben trattare di infiniti punti senza essere in un certo senso infinitamente complessa».²⁸ In realtà in ogni proposizione sono implicite mentalmente moltissime cose che non diciamo, e ciò potrà pure costituire una convenzione; ma è indubitabile che il senso di una proposizione rappresenta l'unità sintetica in cui viene racchiuso e delimitato l'insieme potenzialmente illimitato delle cose che sottintendiamo.

Una proposizione, un oggetto, una creatura vivente o un corpo inorganico portano quindi, nel loro essere, una sorta di perfezione simbolicamente collegabile a quella, assoluta,

dell'autentica e imperscrutabile attualità infinita; ogni cosa è perfetta anche perché rappresenta una miracolosa soluzione dell'infinito potenziale delle parti in cui è scomponibile; essa può essere in fondo considerata una particella di quel Bene che Aristotele pose come estrema causa finale di un processo illimitato.

«La forma infinita» scrisse Niccolò Cusano «è ricevuta solo in modo finito, sicché ogni creatura è, per così dire, una *infinità finita* o un Dio creato, per essere nel modo migliore possibile: come se il creatore avesse detto: “Sia fatto”. Ma siccome Dio, che è l'eternità, non poté essere fatto, fu fatto ciò che poté essere più simile a Dio. Ne consegue che ogni creatura come tale è perfetta, anche se sembra meno perfetta di un'altra».²⁹

Eppure questa rinascimentale affermazione della pienezza formale cela probabilmente un più sottile rapporto tra l'essere e il non-essere quale è rivelato piuttosto nell'opera matematica del Cusano, o in altri suoi enunciati ove prevalga l'arte descrittiva del paradosso. Ivi si ha l'impressione di una possibile vittoria finale del potenziale sull'attuale, dell'assenza sulla presenza formale. E chi volesse una decisiva conferma di questa priorità la troverebbe in alcuni enunciati del *Tao tê ching*: «si ha un bel riunire trenta raggi in un mozzo, l'utilità della vettura dipende da ciò che non c'è»; oppure «l'utilità del vasellame dipende da ciò che non c'è»; o ancora «si ha un bell'aprire porte e finestre per fare una casa, l'utilità della casa dipende da ciò che non c'è». E questi improvvisi, elementari quanto inaspettati balenii di un'intuizione conoscitiva sovvertitrice del senso comune preludono alla descrizione del miracolo etico: la condizione del santo. «Colui che conosce il bianco ma si attiene al nero è la misura del mondo», oppure «colui che si riconosce gatto ma si comporta come una gallina è il burrone del mondo; la “virtù” (“forza”, *tê*) non ne scorre mai via. Egli ritorna allo stato del lattante».³⁰ Un'inquietante associazione di idee fa pensare ad una esclamazione di Hans Sepp, prefiguratore di una pericolosa follia emergente nell'Austria in declino di *Der Mann ohne Eigenschaften*: il più puro ideale morale per Hans Sepp è proprio la condizione del lattante, ove prevale la massima potenzialità e la più alta concentrazione di spontaneità e di energia plasmatrice.

E il medesimo rischio è anche nella prefigurazione di morte di certa enfasi dannunziana; ove non si può tuttavia prescindere da alcuni attimi di intuizione felice quanto rassicurante come quando Stelio Effrena, ne *Il fuoco*, parla della musica: «E hai tu mai pensato che l'essenza della musica non è nei suoni?... Essa è nel silenzio che precede i suoni e nel silenzio che li segue. Il ritmo appare e vive in questi intervalli di silenzio». Identica un'osservazione di S. Weil ispirata a Valéry: «La musique part du silence et y retourne... création et durée».³¹ E ancora una sintesi

di questa verità è riassunta in un frammento di Novalis: «Tutto ciò che è visibile è attaccato all'invisibile, l'udibile al non-udibile, il sensibile al non-sensibile. Forse il pensabile all'impensabile». ³²

1. *Metafisica*, 994 b 9.
2. Due grandezze diseguali, secondo questo postulato, sono tali che esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Un «infinitesimo» è una grandezza che non ubbidisce a questo postulato: un qualsiasi suo multiplo rimane inferiore ad una qualunque grandezza finita assegnata. Il postulato di Archimede esclude perciò l'esistenza di grandezze «infinitesime».
3. *Frammenti*, 1666, Milano, 1976, p. 416.
4. H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, 1949, p. 46.
5. *Frammenti*, 203; ed. cit., p. 89.
6. Cfr. *Cahiers*, III, Paris, 1974, pp. 33 e 39.
7. *Fisica*, 99, 1, trad. it. in *I Presocratici*, vol. I, Bari, 1969, p. 290.
8. *Can an Infinitude of Operations be performed in a Finite Time?*, in «Brit. J. Phil. Sci.», 20, 1969, pp. 203-218.
9. *Fisica*, 263 a - 263 b.
10. *Indeterminism in Classical Physics*, in «Brit. J. Phil. Sci.», 20, 1969, pp. 247-255.
11. *Are there Quantum Jumps?*, in «Brit. J. Phil. Sci.», 3, 1952, pp. 109-123.
12. *Del cielo*, 288 b 33.
13. *Fisica*, 233 a 24.
14. *Summa theol.*, Quaest. LXXXV, Art. VIII.
15. Cfr. B. Spaventa, *Rinascimento, Riforma, Controriforma*, Venezia, 1928, p. 229.
16. *Ibidem*, p. 234.
17. *Ibidem*, pp. 234-236.
18. *Cahiers*, III, Paris, 1974, p. 112.
19. A.N. Whitehead, *Process and Reality*, New York, 1969, p. 53.
20. Citato in A.N. Whitehead, *op. cit.*, p. 54.
21. A.N. Whitehead, *op. cit.*, p. 54.
22. *A Treatise of Human Nature*, Oxford, 1958, p. 27.
23. R. Musil, *op. cit.*, p. 22.
24. A.N. Whitehead, *op. cit.*, p. 84.
25. *Quaderni* (18.6.15), Torino, 1968, p. 162.
26. *Tractatus* (3.251), Torino, 1968, p. 14.
27. *Quaderni* (18.6.15), cit., p. 163.
28. *Ibidem*.
29. *De docta ignorantia*, II, II, trad. it. *La docta ignoranza*, in *Opere filosofiche*, Torino, 1972, p. 114.
30. Cfr. *Tao tè ching*, XI e XXVIII, trad. it. cit., pp. 49 e 80.
31. *Cahiers*, I, Paris, 1970, p. 94.
32. *Frammenti*, 1710; ed. cit., p. 428.

III

NUMERI IRRAZIONALI

La verità per cui nulla 'esiste' se non ciò che è attuale sembrerebbe contraddetta da una circostanza: l'esistenza dei numeri irrazionali. Ma di quale esistenza si tratta? Un numero irrazionale, cioè un numero non rappresentabile come rapporto tra due numeri interi, non può essere scritto in nessun modo come sequenza finita di cifre; se si tenta di esibirlo in forma esplicita le sue cifre si dispongono, per lo meno a partire da un certo punto, senza alcun ordine apparente o legge di formazione; esse sembrano distribuite a caso, come se si trattasse del risultato di successivi, indefiniti, lanci di un dado.¹ L'irrazionale si configura, al suo primo apparire, come una pura impossibilità, quella, ad esempio, di rappresentare mediante una frazione razionale il rapporto tra il lato e la diagonale di un qualsiasi quadrato: tale impossibilità è designata dal simbolo $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ è appunto il rapporto numerico, inesistente, tra le lunghezze della diagonale e del lato di un quadrato, riferite a una comune unità di misura: essi sono perciò detti «incommensurabili»). Un'altra impossibilità, quella di definire un rapporto razionale tra le lunghezze di una circonferenza e del suo raggio, è racchiusa nel simbolo π .

Non si andrebbe lontani dalla verità se si sostenesse che un numero irrazionale non esiste affatto, pur conservando l'intima certezza che esso designa indubbiamente 'qualcosa'. Un numero irrazionale sembra comunque sprovvisto di un'esistenza attuale; esso non può essere esibito come l'insieme di 'tutte' le sue cifre.

La scoperta di grandezze geometriche incommensurabili fu attribuita ai Pitagorici da Aristotele e la carica di mistero e impenetrabilità che indubbiamente essa portò con sé è in parte rivelata nei *Dialoghi* di Platone. Ma di questa 'scoperta' si sa, in realtà, ben poco, ed è certo che i numeri irrazionali erano già noti due o tre secoli prima di Pitagora. Questo problema è reso anche più complesso dalla loro presenza nei *Śulvasūtra* scritti tra l'800 e il 500 a.C., ove sono descritti procedimenti geometrici per la costruzione di altari destinati ai riti della religione vedica.²

Per comprendere il senso che fu attribuito all'irrazionale converrebbe in realtà estendere ogni indagine al di là dei confini tradizionalmente rispettati e scorgere nelle considerazioni

platoniche sull'essenza del numero il precipitato di una visione arcaica della realtà che trovava probabilmente nei ritmi temporali e nei rapporti numerici ad essi collegati la chiave per ogni sua plausibile interpretazione. Ciò che si scoprirebbe è descritto da G. de Santillana e H. von Dechend in *Hamlet's Mill* ove si legge che «l'ordine del Numero e del Tempo era un ordine totale e a cui tutti - dèi, uomini e animali, alberi e cristalli, gli stessi assurdi astri vaganti - appartenevano, tutti soggetti a legge e misura». ³ Appare ivi dimostrato che l'ordine cosmico basato sul numero non fu prerogativa dei soli Greci; e per rintracciarlo non è inutile un riesame della simbologia mitica dei poemi di Snorri Sturluson e della poesia scaldica, degli antichi poemi epici della Finlandia e dell'Estonia, dell'epica nazionale iraniana e avestica, del *Mahābhārata* indù e delle mitologie degli indiani d'America.

Le connessioni tra mito arcaico e proporzioni numeriche dei cicli astronomici, rivelate da G. de Santillana, sono ancora riconoscibili nei *Dialoghi* di Platone, ove si è già alle soglie, tuttavia, di un esplicito linguaggio filosofico. Nell'*Epinomide* (IV, 978) Platone insegna a contare seguendo le più elementari leggi dei fenomeni celesti; il Cielo, cioè il dio che ci ha donato la saggezza del numero, rende palese la prima distinzione tra l'uno e il due mediante l'indefinito susseguirsi del giorno e della notte, mentre il calcolo di precisi rapporti numerici riproduce aritmeticamente i più complicati rapporti dei mesi solari e lunari.

Ma la capacità descrittiva delle proporzioni numeriche si estende dagli eventi stellari, che ne costituiscono il primo modello, ad ogni fenomeno esistente in natura. Nel *Filebo* si spiega come lo status ottimale di una forma e il carattere di stabilità di un oggetto si esprimono in una proporzione ben definita: in essa resta fissato un punto limite in cui si risolve l'indefinita capacità di evolversi dell'oggetto e al di là del quale è momentaneamente inutile procedere. La condizione di salute di un uomo è ad esempio il risultato di un rapporto ottimale tra il secco e l'umido, e quand'esso è realizzato non ha senso superare il limite raggiunto prolungando *in indefinitum* l'eventuale cura medica di cui ci si è serviti.

Ogni sviluppo è una γένεσις εἰς οὐσίαν, cioè una tensione a un qualche tipo di stabilità nel corso della quale il «più e il meno» o il «grande e piccolo» (μέγα καὶ μικρόν), non ancora opportunamente disciplinati, possono alternarsi in infinite oscillazioni prima di raggiungere l'equilibrio. Il «più e il meno» non è che la versione platonica dell'ἄπειρον aristotelico, ed è su di esso che il limite (πέρας) deve intervenire per generare quella «mistione» in cui si realizza ogni esistenza. ⁴

Anche la scienza del discorso è basata sul numero: il λόγος, che è anche analogia, relazione, corrispondenza, è sinonimo di rapporto, e in particolare di rapporto tra numeri. Ignorando il numero, fa capire Platone, si perderebbe la stessa facoltà di

pensare e giudicare e non si vivrebbe che di sensazioni e ricordi. Così commenterà il Cusano in *De docta ignorantia* (I, 1, trad. it. cit., p. 57): «Tutti coloro che cercano la verità giudicano ciò che è incerto paragonandolo e mettendolo in proporzione con il certo. Ogni ricerca è dunque comparativa, in quanto impiega come mezzo la proporzione... Il numero, quindi, che produce la proporzione, non sta solo nella quantità, ma in tutte le determinazioni che possono convenire o differire in un modo qualsiasi, sostanziale o accidentale». Da ciò segue il corollario: «l'infinito come infinito, sfuggendo a ogni proporzione, è ignoto».

Ma il numero irrazionale sfugge appunto ad ogni idea di rapporto e dunque di proporzione, ed essendo l'irrazionale per tal motivo ignoto e inconoscibile, ci si domanda se esso può essere legittimamente annoverato come numero. A questa domanda fu risposto in senso affermativo da R. Dedekind nel 1872 sulla base della teoria delle proporzioni già elaborata da Eudosso. Ma già Platone concepì probabilmente qualcosa di simile, e il procedimento di Dedekind è perfettamente compatibile con la concezione platonica di numero inteso come sintesi dell'Uno e del Due. Platone affermava infatti che i numeri sono forme risultanti da due costituenti: l'Uno, cioè il principio limitante, e la diade indefinita (ἀόριστος δυάς), identica all'ἄπειρον, cioè al principio del più e del meno. Ciò che determina univocamente un numero in quanto tale è evidentemente il suo costituente formale, cioè l'Uno, che interviene ad ogni passo dell'indefinito procedimento del contare. Se ora si costruiscono le successive frazioni

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}, \dots$$

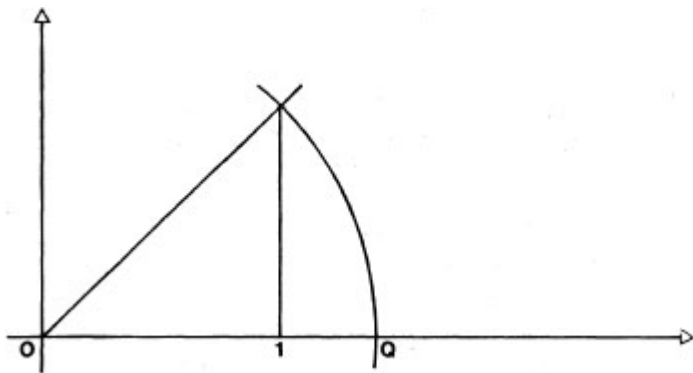
si ottengono dei valori alternativamente minori e maggiori di $\sqrt{2}$ e tali che ogni valore differisce da $\sqrt{2}$ di una quantità minore del precedente. La successione (1), prolungata all'infinito, converge verso $\sqrt{2}$, nel senso che, assegnata una qualsiasi quantità ε , tutti i suoi elementi, tranne un numero finito di essi, elevati al quadrato differiscono da 2 per una quantità minore di ε . Ciò che si ottiene è quindi un indefinito avvicinamento alla determinazione, realizzata dal principio dell'Uno, della diade indefinita rappresentata dalle infinite oscillazioni della successione (1) intorno a $\sqrt{2}$. Dunque anche l'irrazionale è, al limite, un numero e tale forse se lo figurò Platone a differenza di Aristotele ed Euclide che non usarono rappresentare gli incommensurabili se non mediante grandezze geometriche.⁵ A.E.

Taylor dimostrò che il procedimento di approssimazione a $\sqrt{2}$ mediante la successione (1) era molto probabilmente già noto a Platone che allude esplicitamente (in *Repubblica* 546 c) ai numeratori e denominatori delle successive frazioni di (1) (πλευρικοί e διαμετρικοί ἀριθμοί). Anche Teone di Smirne e Proclo descrissero analoghi risultati.

Tutto ciò non si discosta affatto dalla chiave interpretativa rivelataci da S. Weil nei suoi *Cahiers*.⁶ Se si immaginasse di porre sui piatti di una bilancia due gruppi di pesi di forma cubica con i lati dei pesi del primo gruppo uguali alle diagonali dei pesi del secondo gruppo, non si riuscirebbe con nessun numero di essi a raggiungere l'equilibrio. Tutti i rapporti possibili tra i numeri di pesi contenuti nel primo e nel secondo gruppo sarebbero allora distribuiti in due classi, a seconda che la bilancia si abbassi da una parte o dall'altra, e nel mezzo si configurerebbe il progressivo avvicinamento a un punto ideale di mediazione, privo di un'effettiva e concreta esistenza sperimentale.

L'equilibrio inesistente, rammenta S. Weil, è un λόγος ἄλογος, una realtà in qualche modo esistente ma insondabile e sfuggente a un'effettiva denominazione: concettualmente avvicinabile, perciò, ad ogni verità che si configura sempre come il punto innominabile, in greco ἄλογος, in rapporto al quale si possono ordinare, collegandole nella loro giusta posizione, tutte le opinioni possibili su un soggetto.⁷ Ma il punto di mediazione per eccellenza, l'ultima verità ove svanisce ogni sbilanciamento e oscillazione riproducendo l'eterna bipolarità del limite e dell'illimitato, è rivelato in un celebre frammento di Anassimandro: «Principio degli esseri è l'indefinito... da dove infatti gli esseri hanno l'origine, ivi hanno anche la distruzione secondo necessità: poiché essi pagano l'uno all'altro la pena e l'espiazione della ingiustizia secondo l'ordine del tempo». Quell'impenetrabile giustizia ed equilibrio generale da cui è regolato il perenne alternarsi, nella realtà delle cose, di vicendevoli squilibri coincide dunque con l'assoluta infinità, con τὸ ἄπειρον di Anassimandro.

Una dimostrazione strettamente matematica della possibilità di definire l'irrazionale mediante un criterio non ambiguo di determinazione (ovvero, nel linguaggio platonico, mediante una determinazione da parte dell'Uno della diade indefinita) è dovuta a R. Dedekind e ai tentativi paralleli di Cauchy, Weierstrass e Cantor.



Nella prima esposizione dei suoi risultati Dedekind partiva dal riconoscimento dell'analogia tra numeri razionali e punti di una retta, analogia che si muta in precisa corrispondenza qualora si fissi sulla retta un punto 0 e un'unità di misura e si faccia quindi corrispondere a un numero razionale a il punto P della retta la cui distanza da 0 è coperta dal segmento individuato da a . Ponendo la questione in questi termini risulta immediatamente, tuttavia, che ad infiniti punti sulla retta non corrisponde alcun numero razionale (è sufficiente considerare il caso del punto Q nella figura 1).

Le caratteristiche di «continuità» e «completezza» della retta (usando questi due termini nel senso momentaneamente suggerito dall'intuizione) non sono cioè riprodotte dal corpo dei razionali; in quest'ultimo esistono dei «vuoti» (ma l'espressione è terribilmente ambigua) che rendono problematico ogni tentativo di aritmetizzazione del continuo geometrico mediante l'impiego dei soli numeri razionali.

Per giungere a una definizione di numero «reale» che includa ciò che 'manca' al corpo razionale Dedekind pensò dunque di procedere al modo seguente:

1. Fissare assiomaticamente una proprietà caratterizzante della continuità di una retta.
2. Definire i numeri «reali» in modo che soddisfino a una versione aritmetica della proprietà di continuità della retta.

Il primo problema si tradusse nel seguente principio: Se tutti i punti della retta sono contenuti in due classi tali che ogni punto della prima classe sta a sinistra di ogni punto della seconda classe, esiste uno e un solo punto che determina tale divisione di tutti i punti nelle due classi, spezzando così la retta in due parti. Ogni punto della retta è univocamente determinato dalla sezione da esso prodotta e può quindi, esso stesso, denominarsi appunto una «sezione» (*Schnitt*).

Il secondo problema fu risolto osservando che ogni numero razionale x individua analogamente una «sezione» del corpo razionale ordinario, cioè una coppia di classi A_1 e A_2 tali che ogni

numero di A_1 è minore di ogni numero di A_2 , mentre x è il più grande numero della classe A_1 oppure il più piccolo numero della classe A_2 . Una coppia (A_1, A_2) tale che ogni numero di A_1 sia minore di ogni numero di A_2 può tuttavia, pur essendo definita senza alcuna ambiguità, non corrispondere ad alcun numero razionale x , allo stesso modo in cui una sezione della retta (ad esempio quella prodotta dal punto Q della figura 1) può non corrispondere ad alcuna frazione razionale. Ma ogni qualvolta ciò accade, pensò Dedekind, è legittimo «creare» un nuovo numero (irrazionale) y che corrisponda alla coppia (A_1, A_2) cioè che *sia*, esso stesso, la coppia (A_1, A_2) .

La «sezione», osservò A.E. Taylor,⁸ è in perfetto accordo con la nozione platonica di numero poiché è una determinazione, operata dal principio dell'Uno, del «più e meno» impliciti nelle classi A_1 e A_2 : operazione prodotta e legittimata dalla circostanza dell'univoca definibilità della coppia (A_1, A_2) .

La proprietà di continuità del corpo reale era così collegata alla continuità della retta, pur essendo la teoria aritmetica dei reali del tutto indipendente da ogni eventuale illustrazione geometrica.

Un numero irrazionale sembra in tal modo tanto più «reale» in quanto riferibile a un punto della retta: il punto Q (fig. 1), ad esempio, sembra conferire coerenza all'ipotesi di un'effettiva esistenza del numero $\sqrt{2}$, anche se la definibilità di $\sqrt{2}$ non dipende affatto dalla sua visualizzazione come punto geometrico. Ma se si tentasse di concepire un numero irrazionale come un'entità attuale e concreta si incorrerebbe in ogni sorta di paradosso. L'irrazionale non è un infinito attuale in senso categorico, bensì piuttosto l'analogo di qualsiasi altra cosa che si ponga come l'invisibile soluzione di un processo illimitato e teleologicamente ordinato; non è il vero infinito, matematicamente irraggiungibile, ma un analogo della transfinità, successivamente descritta da Cantor come nozione semplicemente allusiva all'assoluta infinità.

Il punto geometrico sembra del resto ancor meno definibile di un numero irrazionale; e ancor meno comprensibile è il senso da attribuire alla sua appartenenza a una retta. Basti pensare a ciò che succederebbe «togliendo» il punto Q dalla retta su cui è posto (fig. 1): si creerebbe realmente un «vuoto» tra due punti in mezzo ai quali passerebbe la circonferenza che prima toccava la retta in Q ? In realtà «l'espressione 'retta a cui manca un punto' è spaventosamente ingannevole» scrisse Wittgenstein;⁹ sicché «l'immagine della retta numerica è assolutamente naturale solo fino a un certo punto: fino al punto, cioè, in cui non la si usa per una teoria generale dei numeri reali».¹⁰

È opportuno vedere allora nella sezione di Dedekind non tanto un 'taglio' che indichi un'effettiva localizzazione del numero, quanto piuttosto un'approssimazione successiva ai due limiti tra

loro adiacenti della classe inferiore A_1 e della classe superiore A_2 ; ¹¹ ed è per lo meno discutibile, in linea di principio, configurarsi il limite di tale processo come una entità realmente osservabile, quale potrebbe apparire un punto geometrico: il numero irrazionale è lo stesso processo; e può esserlo in virtù della non ovvia circostanza per cui le classi A_1 e A_2 sono individuabili in modo non ambiguo e sono di fatto diverse in corrispondenza a numeri diversi.

Lo stesso Dedekind avvertiva che l'insopprimibile tendenza a non considerare lo spazio se non come un continuo è in parte ingiustificata. Tutte le costruzioni geometriche che intervengono negli *Elementi* di Euclide, egli osservava, potrebbero adattarsi ad uno spazio puramente razionale, la cui discontinuità resterebbe di fatto inavvertita.

Se si tenta di definirlo come risultato di parti semplici, indivisibili e attuali, il continuo si tramuta nel modello della pura indefinitezza, nel ricettacolo di tutte le aporie che l'ἄπειρον produce non appena si pretenda di esibirlo in forme concrete. Whitehead vide in esso il modello ideale della pura potenzialità, indicando per contrapposizione nell'atomismo il prototipo dell'attualità. ¹² Il tentativo di fondare il primo sul secondo, cioè il continuo sulla presunta attualità di componenti puntuali, non si rivelò realizzabile se non coll'esplicito richiamo ad una trascendenza, o per lo meno ad una libera creazione di entità irraggiungibili con i mezzi della pura razionalità o dell'ordinario apparato matematico deducibile dai numeri interi: nessuna combinazione finita di simboli può costituire, *di per sé*, una rappresentazione dell'infinito; la combinazione è sempre preceduta dall'idea di ciò che essa vuole indicare. L'attributo di «negatività» tradizionalmente assegnato ai punti dello spazio geometrico era consono a questa trascendenza ed era nel contempo la condizione imprescindibile di un paradossale richiamo simbolico dell'assoluto. Infatti, come accade nella visione di un cubo, di cui non si vedono mai contemporaneamente tutte le facce pur avendone una idea unitaria, ciò che vi è di nascosto nell'apparenza può rivelarsi il motivo principale della sua struttura ordinata. La designazione esplicita di questa negatività come oggetto visibile o razionalmente definibile, ovvero la trasformazione dell'ἄπειρον in nome pronunciabile o addirittura in segno algebrico, si sono spesso capovolte nel paradosso oppure nella semplice inconcludenza. Il progresso matematico che ne derivò è chiaramente una cosa diversa, e non è da mettere in conto di un reale avvicinamento all'idea dell'assoluto. Non sarà inutile, allora, insistere sugli aspetti negativi del continuo, elencando alcune tra le più note testimonianze.

Già Platone stabilì che i punti sono una «finzione» dei geometri, e attribuì loro l'unica proprietà di delimitare porzioni

di retta. I successivi platonisti, per esprimere l'impossibilità di ridurre il continuo a un insieme attuale di indivisibili, parlarono della linea come «flusso» (ῥύσις) di un punto,¹³ espressione di cui si servì poi Newton nella sua teoria dell'infinitesimale.

Aristotele negò, in polemica con gli Atomisti, che la continuità derivasse da una composizione di punti contigui ed enunciò quello che sarebbe stato poi (1919-1924) matematicamente descritto dall'intuizionismo di Brouwer: il continuo non è descrivibile mediante la relazione che lega un insieme ai suoi elementi (il continuo non ha parti costitutive semplici), bensì mediante i concetti di «parte» e «tutto» (una porzione di segmento è una «parte» del segmento inteso come un «tutto», e non un suo elemento costitutivo).

Ruggero Bacone, nell'*Opus majus*, osservò che se le linee fossero formate da punti il rapporto tra lato e diagonale di un quadrato risulterebbe equivalente a un rapporto tra interi e quindi, assurdamente, a un numero razionale.¹⁴

Duns Scoto aggiunse questa dimostrazione: dei cerchi concentrici sono attraversati da qualsiasi raggio staccato dal centro; se fossero formati da punti contigui o elementi indivisibili di altra specie, questi sarebbero uguali, in numero, per ogni cerchio, il che appare manifestamente assurdo.¹⁵

La caratteristica di limite che ha ogni punto di una retta fu così descritta da san Tommaso d'Aquino: «Manifestum est enim quod in linea infinita, et etiam in circulari, non est punctum nisi in potentia».¹⁶ Dalla constatazione che l'intelletto concepisce in via prioritaria solo ciò che è attuale proviene dunque la conclusione: «punctum non ponitur in definitione lineae communiter sumptae».¹⁷

Ockham, in sostanziale accordo con Aristotele, distinse «continuità» da «contiguità», escludendo che la prima potesse risolversi in una giustapposizione di parti indivisibili (cioè punti) contigue. Lo stesso dicasi per la continuità del tempo, che non si risolve in una composizione di istanti: «l'istante non è un'entità assoluta tale da poter essere distinta da ogni entità divisibile».¹⁸ Come l'attualità di un continuo non consiste nelle parti in cui è divisibile così «il tempo è nell'intero movimento dell'intero cielo e non è in alcuna parte di movimento di alcuna parte di cielo».¹⁹

Su queste conclusioni si trovarono sostanzialmente d'accordo i filosofi del XIII e XIV secolo. La maggioranza negò la possibilità di risolvere il continuo in un insieme di punti, e alcuni, come lo stesso Guglielmo di Ockham, tolsero al punto anche la funzione di confine delimitante porzioni finite di retta: non è necessario ammettere l'esistenza del punto perché una grandezza abbia termine.

Gregorio da Rimini chiamò grandezze fittizie i punti, le linee e le superfici e osservò che il geometra non ha bisogno di supporre che esistano realmente: esse sono creazioni dello spirito.²⁰

Buridano osservò che l'affermazione che il punto è indivisibile non vuol dire che è «realmente» così, né che ciò va preso alla lettera.²¹ Quando l'astronomia accampa l'ipotesi degli epicicli e degli eccentrici usa finzioni utili per il calcolo della posizione dei pianeti, e nulla di più. Con i punti, le linee e le superfici si può in ogni caso costruire una Geometria fittizia dalla cui esemplare chiarezza l'intelletto possa ricevere sussidio per una migliore comprensione della realtà.

Le correnti nominaliste anticiparono così l'idealismo moderno e l'immagine che fornirono del continuo non era troppo dissimile a quella descritta dalla formula kantiana: la legge della continuità delle forme è una semplice idea, alla quale non si può riferire un congruo oggetto nell'esperienza.

P. Duhem²² dimostrò come Buridano, W. Burley, Alberto di Sassonia elaborarono idee non dissimili a quelle che fecero concepire a Dedekind una definizione di numero reale come separatore di due successioni illimitate. Il problema era una variante dei casi finora discussi: il punto di equilibrio tra una forza e l'opposta resistenza è definito da due categorie di circostanze; l'una prevede che l'evento risultante segua la direzione della forza agente; l'altra comprende tutti i casi in cui la forza è sopraffatta dalla resistenza; ciascuna serie di circostanze è avvicinabile indefinitamente al punto di equilibrio, percorrendo il continuo delle infinite possibilità intermedie. Il punto di equilibrio è un punto limite, che non appartiene né all'una né all'altra delle due infinite successioni che lo definiscono.

Leibniz concepì successivamente il continuo matematico come ente ideale, cioè immaginario, ed elaborò una teoria relazionale dello spazio assegnando ai punti geometrici una funzione analoga a quella che già concepì Platone.

Alla fine dell'800 Cantor fornì, del continuo, una definizione matematicamente attendibile e in essa Russell vide una confutazione della tradizionale opinione filosofica che vietava di considerare il continuo come insieme di punti. Cantor dimostrò tuttavia che il continuo non è numerabile, cioè che non se ne possono contare tutti gli elementi costitutivi, uno per uno, mediante i numeri interi. E. Borel, in uno scritto del 1909, interpretava il risultato di Cantor come prova dell'esistenza di una componente indefinita del continuo: «Esistono certamente» egli scrive «nel continuo geometrico degli elementi che non possono essere definiti: questo è il senso reale dell'importante e celebre affermazione di Georg Cantor: cioè il continuo non è numerabile. Il giorno in cui tali elementi indefinibili fossero realmente messi da parte e non si pretendesse di farli intervenire più o meno implicitamente, ne risulterebbe una grande semplificazione nei metodi dell'Analisi».²³ Del resto la tecnica con cui Weierstrass rifondò l'Analisi, osservava ancora Borel,²⁴ si basa

sul fatto comunemente accettato che tutte le Matematiche possono essere dedotte dall'unica nozione di numero intero: «le nozioni fondamentali, ove interviene l'idea di limite (numeri incommensurabili, derivate, integrali definiti, integrali di equazioni differenziali, ecc.) sono definite a partire dal numero intero: una volta acquisite tali nozioni, è possibile utilizzarle senza che sia necessario far intervenire in ogni circostanza la loro definizione per mezzo dei numeri interi».²⁵

La definizione di Cantor, benché matematicamente ineccepibile, non esaurì l'insieme di concetti e immagini che l'intuizione del continuo aveva da sempre evocato. In particolare, l'idea di potenzialità illimitata, che la visione di Cantor non aveva certamente esaltato, riapparve nella matematica intuizionista di Brouwer e il continuo ricominciò a somigliare, nella nuova teoria, a quello che la filosofia aristotelica e tomista avevano sempre prospettato.

Brouwer scorre nelle localizzazioni puntuali del continuo (e in particolare nei numeri irrazionali) non tanto delle entità attualmente definibili quanto delle successioni di numeri naturali susseguentisi nell'ordine decretato da una legge aritmetica o da una «libera scelta». Geometricamente l'idea poteva allora configurarsi come la determinazione di un punto mediante una infinita successione di intervalli caratterizzati da un «livello» di piccolezza continuamente crescente. La coincidenza di due punti significava la coincidenza, da un certo momento in poi, delle due successioni che li rappresentavano; all'opposto, la distinzione era rivelata dal ritrovamento, nelle due successioni, di due intervalli disgiunti, l'uno contenente il primo punto e l'altro il secondo.

Ma il riconoscimento della distinzione o dell'uguaglianza non era un fatto scontato: l'esclusione intuizionista del principio del «terzo escluso» determinava l'impossibilità di una soluzione di principio, che fosse indipendente dall'effettiva costruzione matematica, del problema dell'uguaglianza o meno dei punti. Dire a priori che due numeri irrazionali (o due punti) dovevano essere uguali o distinti era un non-senso, ed una terza valenza logica, tra il sì e il no del «tertium non datur», doveva allora essere ammessa. Il dilemma così codificato nel rifiuto del «terzo escluso», di cui sono numerosi, nella letteratura, gli esempi riferiti al caso dei più noti numeri irrazionali, descriveva nel modo migliore la caratteristica intuitiva del continuo come luogo dell'indefinito; in particolare l'idea di «contatto» tra due punti (nozione sul cui carattere problematico Aristotele aveva spesso insistito) veniva riconosciuta nel suo aspetto di legittima ambiguità.²⁶

Fu anche riconosciuto, da alcuni, che l'indefinitezza del continuo spaziale e temporale contamina la stessa chiarezza di contorni degli oggetti che in esso sono immersi. Husserl spiegò come l'apprensione (idea) di ogni cosa «reale» emerge solo come

punto limite nel continuo del processo di apprendimento e delle sempre più esatte esperienze da essa suscitate.²⁷ L'esperienza fenomenica implica in sé l'infinità e la potenzialità di un «continuum» di apparizioni; ma è anche vero che l'oggettività delle idee (come quella dei punti e degli irrazionali) non è per questo compromessa: «l'idea di una infinità... non è essa stessa una infinità»²⁸ e la comprensione che questa infinità per principio non può essere data «non esclude, ma anzi esige, la 'datità' comprensibile dell'idea di questa infinità». «... L'essere immanente è dato per la conoscenza» scrive ancora Husserl²⁹ «soltanto in quanto idea, poiché richiede un processo di avvicinamento. La datità adeguata è un'idea che ha il carattere di un limite, al quale ci si può avvicinare a piacimento».

Anche Husserl sembra così alludere all'infinità finita (non descrivibile analiticamente ma rappresentabile sinteticamente nell'idea) di cui già scrisse il Cusano; il che non implica però in nessun modo che un insieme possa risultare effettivamente e attualmente infinito nell'immanenza di un percorso analitico di tutti gli elementi in esso riscontrabili.

Sarebbe arduo, tuttavia, stringere l'infinità del continuo nel suo aspetto di pura negatività. La prospettiva da cui si contempla l'infinito è pur sempre suscettibile di capovolgersi nel suo contrario: se il non-essere appare principio di disgregazione nel mondo delle forme limitate, una sua trasposizione spinge a configurarsi il suo apparente contrario: il puro Ente. Il ricorso alla dimostrazione hegeliana dell'identità di essere e nulla può spiegare simili ribaltamenti di visuale.

Nel secolo scorso Vincenzo Gioberti insegnò a scorgere nel continuo, secondo una prospettiva teologica, la più nitida immagine di ciò che egli chiamava lo stato di «metessi», termine alludente alla partecipazione alla perfezione divina ed al nesso tra questa e la creatura finita: sinonimo dunque dell'atto creativo di Dio, del passaggio dall'Ente all'esistente operato nel Verbo agente quale intervallo o diastema tra i punti dello spazio e gli astanti del tempo. L'urgenza di una compatibilità dell'infinito attuale con l'universo creato divenne un corollario dei misteri della creazione e dell'incarnazione. Ciò che Dedekind avrebbe chiamato «sezione» dei numeri razionali, il λόγος ἄλογος degli antichi, si tramutò anche nell'archetipo della *relazione*, dell'unica forma di accessibilità alla perfezione di Dio. «La relazione è il vincolo delle cose,» scrisse Gioberti «l'unità dell'universo, l'intelligibilità delle esistenze, la luce, ecc. Essa è il mediatore tra Dio e l'uomo, tra il mondo e Dio. S'immedesima con l'atto creativo. Cristo è la relazione impersonata...».³⁰ Perciò: «L'atto creativo è un passaggio; dall'Ente all'esistente. Questo passaggio è infinito, è un infinito attuale; è l'infinito dell'onnipotenza divina. Questa si manifesta finitamente nell'effetto in sé considerato, come finito attualmente; si manifesta in modo infinito, per modo

che lo produce, per l'intervallo infinito che supera producendolo».³¹

Raffigurando l'atto creativo nel punto che muovendosi diventa linea o nel centro che irradia il movimento infinitamente veloce del primo cerchio angelico, come lo descrisse Dante in *Paradiso*, XXVIII, la prova decisiva dell'esistenza di Dio, a quanto scrive Gioberti, è data dalla filosofia infinitesimale. L'impulso creativo è realizzato nel continuo, ove più che altrove è ravvisabile l'invisibilità del contatto, della relazione, del vincolo dialettico dei contrari: è qui adombrata una giustificazione teologica del calcolo leibniziano come riprova che «la creazione matematica è la più viva immagine della creazione divina».³²

«Il mezzo, l'ilo, l'unione, il transito, il passaggio, il trapasso, l'intervallo, la distanza, il vincolo, il contatto» sono ancora le parole di Gioberti «di due o più cose son misteriosi, perché si radicano nel continuo, nell'infinito. L'intervallo che corre tra un'idea e un'idea, una cosa e una cosa è infinito, e non può essere superato che dall'atto creativo. Ecco il perché il momento dinamico e il concetto dialettico del mezzo non è meno misterioso di quello del principio e del fine. Il mezzo è l'unione di due diversi ed opposti in un'unità. È un concetto essenzialmente dialettico, e involge una contraddizione apparente, cioè l'identità dell'uno e del molteplice, del medesimo e del diverso. Tale unità è semplice e composta; è unità e sintesi o armonia. Tiene dei due estremi senza essere né l'uno né l'altro. È il continuo, e perciò l'infinito. Ora l'infinito riunendo identicamente i contrarii ci chiarisce la natura dell'intervallo. Nel moto, nel tempo, nello spazio, nei concetti, il discreto ci è facile a capire, perché finito. Il continuo e l'intervallo sono misteriosi, perché infiniti».³³

Se Gioberti avesse potuto conoscere la posizione neointuizionista sul principio del terzo escluso, avrebbe scorto nella terza valenza logica tra il sì e il no il mistero della mediazione di ogni antagonismo polare. Il verso dantesco «che no e sì nel capo mi tenciona» (*Inf.*, VIII, 111), in cui egli vide simboleggiato lo sviluppo dinamico tra l'uno e il molteplice, ben si potrebbe trasporre, in questa visuale, ad ogni approssimazione dell'irrazionale svolgentesi nell'indefinita alternanza di μέγα καὶ μικρόν. L'idea del pitagorico Liside che Dio potesse essere pensato come un numero irrazionale³⁴ assumerebbe allora un senso perfettamente analogo a quello suggerito da una terza valenza logica per il problema della determinazione a priori di un numero irrazionale, quale l'avrebbero concepita più tardi gli intuizionisti. Ove l'idea intuizionista propende per l'impossibilità dell'infinito attuale, Gioberti ne avrebbe visto volentieri un riflesso quasi tangibile.

L'infinito attuale si riflette così simbolicamente in tutto ciò che svolge il ruolo di mediazione. Il verbo si traspone analogicamente nel linguaggio e nella parola e i nomi ne riproducono la potenza

ordinatrice. «La parola» scrive Gioberti «è dunque la circoscrizione di un pensiero infinito. Essa è dunque negli ordini del pensiero ciò che fu la creazione nel senso pitagorico e platonico negli ordini dell'Universo; giacché la conoscenza intuitiva è quasi la materia, l'ἄπειρον del mondo intelligibile».³⁵

Anche nell'atto generativo immanente è ravvisabile la somiglianza all'archetipo: *penitus* e *penes* indicano in latino vicinanza e intimità e designano insieme la generazione. Dalla stessa radice *penisola*, *penombra*, *penultimo*, e nell'idea della similitudine, del *quasi* indicata da queste parole, Gioberti scorge l'impronta dell'unità invisibile e dell'idea esemplare, dell'identità coordinatrice, del centro dialettico conciliativo e armonizzante.

Nel legame visibile e invisibile tra le cose, nel tessuto connettivo del reale è riconoscibile l'impronta dell'infinito attuale: il quasi o la similitudine «da un lato rasenta l'identità, e dall'altro importa una diversità infinita, perché il minimo è massimo, essendo entrambi infiniti. La ragione di tal contraddizione apparente è l'infinità dell'idea, di cui le cose create son copie. L'idea essendo una e infinita somiglia e dissomiglia infinitamente a se stessa, e tal somiglianza e dissomiglianza infinita è l'archetipo della somiglianza e dissomiglianza finita delle creature fra loro».³⁶

L'infinito dinamico attribuito da Dante all'emanazione divina in *Par.* XVIII, esplicantesi nel continuo matematico e nel suo primo impulso generativo configurabile come infinitesimo o differenziale, è riconoscibile nell'accettazione di un'infinita esplicazione divina «in tempore et actione»: la prospettiva teologica riesce a scorgere in ogni evento naturale un'operazione divina, e dunque un infinito attuale. Questa stessa prospettiva contribuì a capovolgere la sinonimia male cosmico-infinito nell'allusione diretta ad un'infinità positiva: retrocedendo al Medioevo i primi segni di questo cambiamento si scoprono nelle tesi di Duns Scoto sullo stato di grazia infinitamente grande del Cristo, negli argomenti dimostrativi di Gregorio da Rimini in favore dell'infinito categorematico, nelle indagini scolastiche sulla «latitudo formarum», cioè sui gradi di intensità, minima e massima, delle qualità e delle forme.

Ma qualcosa di questo non mancò neppure tra i Greci. Gioberti allude a Melisso come l'unico che intuì nell'ἄπειρον un sinonimo dell'Ente, dunque un'unità positiva, associandolo nel contempo all'idea del continuo: «così dunque è eterno e infinito e uno e continuo (ὅμοιον) tutto» dice un suo frammento,³⁷ che Aristotele non mancò d'altronde di confutare (*Fisica*, 207 a 15).

1. Le cifre del numero π si presentano, tuttavia, con una singolare forma di ordine; cfr. D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. II, Addison-Wesley, 1969, p. 35.

2. Cfr. C.N. Srinvasiengar, *The History of Ancient Indian Mathematics*, Calcutta, 1967. Cfr. inoltre A. Seidenberg, *The Ritual Origin of Geometry*, in «Archive for the History of Exact Science», 1, 1962, pp. 488-527.
3. G. de Santillana, H. von Dechend, *Hamlet's Mill*, Boston, 1969, p. 6 (trad. it. Milano, 1983, p. 29).
4. Cfr. A.E. Taylor, *Plato: the Man and his Work*, Cleveland, 1966, pp. 414-415.
5. Cfr. A.E. Taylor, *op. cit.*, p. 505.
6. *Cahiers*, II, Paris, 1972, pp. 31-32.
7. *Ibidem*, p. 32.
8. A.E. Taylor, *op. cit.*, p. 511.
9. L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, trad. it. *Osservazioni sui fondamenti della matematica*, Torino, 1971, p. 198.
10. *Ibidem*, p. 195.
11. *Ibidem*, p. 197.
12. A.N. Whitehead, *op. cit.*, p. 76.
13. A.E. Taylor, *op. cit.*, pp. 505-506.
14. P. Duhem, *Le système du monde*, Paris, 1954, vol. VII, p. 20.
15. *Ibidem*, p. 21.
16. *Summa theol.*, Quaest. LXXXV, Art. VIII.
17. *Ibidem*.
18. Cfr. W. Ockham, *De sacramento altaris*, edited by T.B. Birch, citato in T.B. Birch, *The Theory of Continuity of William of Ockham*, in «Philosophy of Science», 3, 1936, pp. 494-505.
19. *Ibidem*.
20. P. Duhem, *op. cit.*, p. 33.
21. *Ibidem*, pp. 37-38.
22. *Ibidem*, p. 83.
23. E. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, in «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 27, 1909, pp. 247-271.
24. E. Borel, *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, in «J. de Mathématiques pures et appliquées», 5^e série, tome IX (1903), pp. 329-375.
25. *Ibidem*.
26. Cfr. H. Weyl, *op. cit.*, pp. 52-54.
27. *Ibidem*, p. 41.
28. E. Husserl, *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie* (§ 143); trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, Torino, 1965, p. 320.
29. *Ibidem*, p. 388.
30. V. Gioberti, *Della Protologia*, t. 1, Napoli, 1864, p. 177.
31. *Ibidem*, p. 263.
32. *Ibidem*, p. 292.
33. *Ibidem*, p. 160.
34. Cfr. Sabètai Unguru, *Incommensurability and Irrationality - a New Historical Interpretation*, in «Hist. Sci.», 15, 1977, p. 217.
35. V. Gioberti, *op. cit.*, p. 191.
36. *Ibidem*, p. 159.
37. Cfr. R. Vitali, *Melisso di Samo*, Urbino, 1973, p. 134.

IV

L'INFINITO DI SAN TOMMASO

Esaminando la definizione di insieme che G. Cantor propose alla fine del secolo scorso non può che sorprendere l'evidenza della sua somiglianza con una definizione di insieme già formulata da san Tommaso d'Aquino più di sei secoli prima.

Per G. Cantor un insieme è la riunione in un tutto di oggetti determinati e distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero. Per san Tommaso un insieme è, non diversamente, un aggregato di unità distinte, ovvero: «Multitudo non est aliud quam aggregatio unitatum»,¹ e inoltre: «Multitudo est id quod est ex unis quorum unum non est alterum»² (cioè letteralmente: un insieme è un composto di unità delle quali ciascuna è distinta dall'altra).

Inutile dire che l'apparente somiglianza delle definizioni cela in realtà idee e intendimenti affatto diversi. Ambedue le definizioni vogliono cogliere l'essenza di ciò che si suppone debba essere un insieme, ma nella definizione di Cantor l'urgenza della funzionalità matematica appare prioritaria e dominante.

Fu soprattutto da motivazioni matematiche che Cantor fu portato a giustificare l'esistenza di insiemi attualmente infiniti e la loro collegabilità ai numeri transfiniti. Al contrario, ogni conclusione sulla definizione di insieme e di numero fu per san Tommaso un semplice corollario di regole metafisiche, il precipitato aritmetico di una più che millenaria visione del mondo che conferiva alle teorie tomiste non minore verosimiglianza di quella che sembrarono possedere le teorie cantoriane. Del resto la nozione cantoriana di numero transfinito non era nata come «necessità», ma piuttosto come «opportunità», non come obbligatoria deduzione ma come libera creazione e invenzione del genio matematico. La legittimità della sua introduzione nel linguaggio matematico della teoria degli insiemi poteva in linea di principio essere posta in discussione, e ci fu infatti chi, come Kronecker, non si stancò mai di attaccare Cantor con la più esplicita avversione.

Cantor sostenne dunque l'esistenza di insiemi attualmente infiniti e di numeri infiniti. San Tommaso, sei secoli prima, l'aveva invece autorevolmente negata, argomentando che se gli elementi di un presunto insieme infinito fossero concepibili tutti

simultaneamente, in modo da formare una totalità attualmente definita, essi potrebbero essere contati uno ad uno, risultando così inevitabilmente in numero finito e generando quindi una contraddizione.

Ma le conclusioni tomiste traevano la forza della loro verità, più ancora che dalla correttezza logica, dalla loro riferibilità a una visione del mondo di cui Cantor non aveva ormai che una debole percezione. L'incompatibilità delle tesi tomiste con quelle cantoriane era semplicemente l'incompatibilità delle due diverse concezioni del mondo che le avevano generate; un'eventuale identità di tali tesi sarebbe stata allora perfino indifferente, come è del resto priva di sostanziale rilievo l'identità formale delle due definizioni di insieme.

Può essere rischioso soffermarsi a lungo sulla semplice idea che Cantor seppe vedere ciò che san Tommaso non aveva capito per il suo scarso esercizio in una matematica ancora inesistente. È per lo meno difendibile, a tale proposito, l'opinione di Musil, secondo cui «ogni progresso è un guadagno nel particolare ma anche uno smembramento nell'insieme».³ E tale opinione si accorda del resto con le conclusioni più recenti formulate da T. Kuhn in *The Structure of Scientific Revolutions*. Il successo di una nuova teoria, di un nuovo paradigma scientifico che porti il seme di un'autentica rivoluzione, implica una totale ridefinizione di tutta la scienza corrispondente e accredita nel modo più generale una inedita Weltanschauung. «Col mutare dei problemi, spesso muta anche il criterio che distingue una soluzione realmente scientifica da una mera speculazione metafisica, da un gioco di parole, o da un indovinello matematico. La tradizione della scienza normale che emerge dopo una rivoluzione scientifica è non soltanto incompatibile, ma spesso di fatto incommensurabile con ciò che l'ha preceduta».⁴

In tale prospettiva ad ogni cosa è attribuibile una proprietà che un giorno la immetta in una nuova grande correlazione, senza che ciò debba costituire una verità conclusiva; sicché «lo spirito» scrive ancora Musil «è il grande fabbricante di alternative, di 'secondo i casi', ma lui stesso non si lascia mai afferrare, e quasi si potrebbe credere che solo suo effetto sia la distruzione».⁵ Neppure l'apparenza di incontrovertibilità degli strumenti matematici usati da Cantor era in grado di sfuggire alla giustizia equilibratrice di questa regola; egli seppe semplicemente trovare la giusta correlazione matematica in cui l'infinito attuale potesse inserirsi come idea compatibile e ricca di implicazioni.

Di san Tommaso vale comunque la pena parlare, anche perché G. Cantor non perse mai la sensazione che il contraddire i divieti aristotelici e tomisti lo esponeva a rischi difficilmente valutabili. Nei suoi scritti egli avvertì sempre la necessità di giustificare le sue conclusioni in rapporto alle più tradizionali teorie cui esse si opponevano.

Nella *Summa theologia* si accenna in termini molto chiari ed espliciti alla pura illogicità di un'eventuale creazione divina di un oggetto che sia assolutamente infinito (cioè «*infinitum simpliciter*»). Scrive san Tommaso che «*contra rationem facti est quod sit simpliciter infinitum. Sicut ergo Deus licet habeat potentiam infinitam, non tamen potest facere aliquid non factum, hoc enim esset contradictoria esse simul, ita non potest facere aliquid infinitum simpliciter*».⁶

L'argomentazione tomista era quindi semplice e lineare: Dio può fare ciò che vuole, ma il fare provoca l'esistenza di ciò che è fatto, e ciò che è fatto, appunto perché è fatto, non può essere in tutto e per tutto senza limiti: «*contra rationem facti est quod sit simpliciter infinitum*». San Tommaso negava l'esistenza dell'assoluto infinito in atto al di fuori di Dio e adduceva come prova della sua tesi un argomento che si fondava proprio sul riconoscimento dell'onnipotenza di Dio: nessuna contraddizione quindi tra quest'ultima e l'impossibilità dell'infinito in atto «*simpliciter*».

La dichiarazione di questa compatibilità è importante, perché fu proprio in questo punto che si innestò uno dei primi atti di esplicita rottura con la tradizione aristotelica-tomista. Nel 1277 una condanna da parte del vescovo di Parigi di un folto gruppo di tesi averroiste colpiva implicitamente anche la tesi tomista dell'impossibilità divina di creare un insieme infinito. L'onnipotenza divina venne in seguito, da alcuni, estesa alla creazione di quantità infinite, e fu questo un segno evidente della fine dell'*ἄπειρον* inteso come sinonimo della componente negativa di ogni fondamentale bipolarità dell'esistenza.

Ma conviene procedere con ordine, onde arrivare alla più chiara comprensione del senso dell'innovazione che portarono con sé le successive concezioni sull'illimitato. Anzitutto, in che senso san Tommaso riproponeva la nozione aristotelica di *ἄπειρον*? Aristotele aveva eliminato ogni possibilità di confusione tra il falso infinito dell'*ἄπειρον* e l'infinita perfezione divina togliendo semplicemente a quest'ultima ogni attributo di infinità. La perfezione divina era designata da termini alludenti alla sua «totalità», alla sua «pienezza», alla sua «eternità», ma non alla sua illimitatezza. Quest'ultima competeva esclusivamente al regno della quantità e a Dio era perciò completamente estranea.

San Tommaso non osa seguire l'impostazione aristotelica e accetta la tesi secondo cui «Dio è infinito, ed eterno, ed incircoscrivibile»;⁷ ma aggiunge immediatamente che l'infinito può essere di due opposte nature: l'una riconducibile all'idea di forma, l'altra all'idea di materia.

L'infinito «*ex parte materiae*» doveva perciò corrispondere a un analogo della falsa infinità dell'*ἄπειρον* d'Aristotele, mentre l'infinito «*ex parte formae*», alludendo a una sorta di perfezione formale, poteva indicare in qual senso si sarebbe potuto parlare

correttamente, al limite, dell'infinità di Dio.

La distinzione dei due infiniti, non dissimile in fondo dalla distinzione tra infinito potenziale e infinità attuale, era così un motivo di conciliazione tra la tesi cristiana dell'infinità di Dio, proclamata fin dai tempi di Taziano e Tertulliano, e la decisa assegnazione aristotelica dell'infinito al principio materiale dell'esistenza; l'uno riproduceva l'imperfezione dell'ἄπειρον, l'altro la perfezione di Dio. Scrive san Tommaso: «infinium secundum quod attribuitur materiae, habet rationem imperfecti, est enim quasi materia non habens formam», mentre «infinium, secundum quod se tenet ex parte formae non determinatae per materiam, habet rationem perfecti».⁸

Ma nel mondo concreto del divenire non è rinvenibile nella sua nuda essenza né l'«infinium ex parte materiae» né l'«infinium ex parte formae». Il primo non può esistere semplicemente perché ogni potenzialità illimitata è corretta da un confine impostole dal principio formale («materia autem perficitur per formam per quam finitur»); il secondo è difficilmente collocabile tra le forme create, perché la forma è in un certo modo «contratta» dalla materia che la fa esistere come essenza di una qualche particolare individualità: se perciò le si consente una illimitata dilatazione conforme al suo grado di universalità, essa smette di costituire l'attributo essenziale di questo o quell'oggetto e si identifica quindi con ciò che non ha bisogno di una ricezione esterna per esistere, ma trova in se stesso la propria sostanzialità; l'infinito «ex parte formae» e perciò, in definitiva, la vera infinità attuale si identificano tipicamente nell'essenza divina («cum igitur esse divinum non sit esse receptum in aliquo, sed ipse sit suum esse subsistens,... manifestum est quod ipse Deus est infinitus et perfectus»⁹).

Non può allora esistere alcuna infinità all'infuori di Dio? A questa decisiva domanda san Tommaso risponde lasciando libera una debole possibilità di esistenza; egli conclude che l'infinità assoluta «per essentiam» o «simpliciter» appartiene solo a Dio, mentre ciò che è altro da Lui non può essere che finito («finitus simpliciter») oppure infinito in modo relativo, cioè corrispondentemente alla sua natura specifica («infinitus secundum quid»). Dunque se nel mondo delle forme è del tutto esclusa resistenza dell'infinito «simpliciter», è tuttavia consentito l'«infinium secundum quid», e ciò lascia adito a sospetti, non del tutto infondati, circa un'eventuale trasgressione del rigido divieto aristotelico all'esistenza di ogni specie di infinito. Ma san Tommaso sembra far capire che l'«infinium secundum quid», se considerato nell'ambito di una umana comprensibilità, è riconoscibile essenzialmente come «infinium ex parte materiae», ed è quindi un infinito potenziale, cioè inesistente.

Dell'«infinium secundum quid» che partecipa del principio materiale, è facile fornire un esempio accessibile; san Tommaso

cita il caso del legno, che, per quanto finito nella sua essenza, è infinito se riguardato sotto l'aspetto della sua illimitata potenzialità ad essere forgiato in infinite figure. L'«*infinitem secundum quid*» che partecipa della forma non è invece altrettanto facilmente associabile a qualche oggetto dell'ordinaria esperienza: si tratterebbe di esibire delle forme universali, non «contratte» da alcuna materia, come si potrebbe pensare possano essere solamente le essenze angeliche (negli Angeli «puro atto fu prodotto» avrebbe scritto Dante¹⁰).

Se si volesse a questo punto capire la natura dell'infinito quantitativo, che per san Tommaso è anche l'infinito di cui si occupano i matematici, non si avrebbe che da aggiungere un semplice corollario a quanto descritto. Innanzitutto l'infinito «*secundum quantitatem*» sta evidentemente dalla parte dell'infinito potenziale, dell'infinito «*ex parte materiae*», e non è perciò attribuibile a Dio («... *infinitem quod competit quantitati, est infimum quod se tenet ex parte materiae. Et tale infimum non attribuitur Deo...*»¹¹). L'infinito «*quod competit quantitati*» trasmette quindi il carattere negativo della propria potenzialità all'infinito matematico, che all'idea di quantità era strettamente legato. Quando allude all'uso che dell'infinito fanno i matematici san Tommaso ripete allora ciò che aveva già asserito Aristotele: per le dimostrazioni dei propri teoremi il geometra non ha alcun bisogno dell'infinito in atto; gli è sufficiente constatare che è possibile, in certi casi, procedere al di là di qualsiasi grandezza o quantità finita assegnata, sicché egli può utilizzare l'infinito, senza alcun danno, limitatamente al solo significato consentito, quello cioè potenziale («*geometer non indiget sumere aliquam lineam esse infinitam actu; sed indiget accipere aliquam lineam finitam actu, a qua possit subtrahi quantum necesse est*»¹²).

Pur esistendo in forme perfette, non contratte da materia alcuna, l'«*infinitem secundum quid*» ed «*ex parte formae*» non trova perciò alcuna collocazione nel mondo delle forme matematiche, ove resta in gioco l'antica distinzione tra forma limitante e materia illimitata; il carattere formale della matematica è affidato ai limiti delle figure geometriche, alla perfezione ordinatrice dei numeri finiti.

Il contorno superficiale degli oggetti e la loro figura geometrica sono ancora per san Tommaso, come lo furono per i matematici greci, il termine e il confine per eccellenza della potenzialità illimitata di ogni substrato materiale, nonché il miracoloso punto di incontro e di equilibrio di tale potenzialità con la fatale «contrazione», operata dalla materia, della forma perfetta di Dio nelle forme limitate dell'esistenza.

Questa verità era stata descritta dalla matematica euclidea e da quella pitagorica, ove al confine superficiale veniva aggiunto, a sancire il limite di un'esistenza oggettiva, il suo colore. La superficie dei corpi veniva chiamata dai Pitagorici *χρoιά*,¹³ cioè

colore, e questa corrispondenza sarebbe stata rilevata molto più tardi anche da Goethe: «L'occhio non vede nessuna forma poiché per esso solo il chiaro, lo scuro ed il colore, *insieme*, compongono ciò che distingue un oggetto da un altro, una parte di oggetto da un'altra».¹⁴

In verità, pur ammettendo i poteri della visione scotopica (la percezione visiva degli oggetti al buio) che sembra opporsi alla tesi di Goethe, sarebbe ben difficile pensare che la forma, e quindi il limite, possano sopravvivere in *tutta* la loro pregnanza e universalità di significato senza il colore. Parlando di «forma» è impossibile prescindere, se ci si riporta all'antico (e perciò anche a Goethe), dalla sua funzione simbolica di raccordo di diversi piani di esistenza, di classe di equivalenza di realtà reciprocamente corrispondenti e assimilabili a un unico segno. Se si prescindesse dai colori e dalla loro funzione di contorno e di rivestimento verrebbe a mancare un intero patrimonio di corrispondenze e sarebbe arduo ripensare in questa inedita veste spettrale l'insieme di attributi tradizionalmente associati alla forma. Basterebbe leggere il saggio memorabile di Frédéric Portal *Des couleurs symboliques* (Paris, 1837) per convincersi che l'equivalenza greca $\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma\text{-}\chi\rho\omicron\iota\acute{\alpha}$ non potrebbe essere confutata senza perdere l'intero significato della tradizione culturale che è pensabile l'abbia ispirata. Del resto «la metafisica della teoria della natura» scrisse Goethe «rimanga campo del filosofo e si lasci decidere a lui da quale altezza e profondità vuol cominciare e fin dove vuole salire e discendere».¹⁵ E questo enunciato ci riporta direttamente a Kuhn (oltre che, più ovviamente, a Feyerabend) e alla reciproca incommensurabilità dei paradigmi: le tesi di Goethe si scontrano sul piano fattuale con i dati dell'osservazione ma rientrano nell'intima compatibilità di uno schema che non avrebbe potuto conciliare l' $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$ con la tenebra senza contraddirsi.

Anche Aristotele spiegava come la qualità cromatica dei corpi fosse qualcosa di inseparabile dal limite ($\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$), e quindi dal loro contorno geometrico, mentre l'identità di limite e superficie di un solido veniva sinteticamente descritta nella 2ª definizione dell'XI libro degli *Elementi* di Euclide: «Limite di un solido è la sua superficie».

La stessa definizione aristotelica di umidità poggiava su identici principi: l'umido partecipa dell'illimitato perché privo di un suo proprio e autonomo contorno superficiale; l'acqua assume la forma del recipiente che la contiene.¹⁶

Analoghi intendimenti rivela la prima sentenza contrapposta da san Tommaso all'uso corrente dell'infinito nei procedimenti matematici: «Omne corpus superficiem habet. Sed omne corpus superficiem habens est finitum, quia superficies est terminus corporis finiti. Ergo omne corpus est finitum. Et similiter potest dici de superficie et linea. Nihil est ergo infinitum secundum

magnitudinem». ¹⁷

Anche quando sostiene che l'infinito, di qualsiasi specie esso sia, è ignoto, ¹⁸ san Tommaso riafferma una verità pitagorica: i Pitagorici, nel porre l'ἄπειρον alla stregua del principio materiale, dicevano che esso era perciò inconoscibile; san Tommaso, all'inconoscibilità dell'infinito «secundum magnitudinem et multitudinem», cioè dell'infinito matematico ex parte materiae, aggiunge l'imperscrutabilità dell'infinito «secundum speciem» o «secundum qualitatem», e, in definitiva, l'imperscrutabilità dell'essenza divina. Dante lo imiterà scrivendo nel *Convivio* (II, XIII, 19, Firenze, 1968, parte I, p. 202) che una proprietà del Sole è riprodotta nell'allusione all'infinito numerico contenuta nelle leggi dell'Aritmetica: «L'altra proprietade del Sole ancor si vede nel numero, del quale è l'Arismetrica: che l'occhio de lo 'ntelletto nol può mirare; però che 'l numero, quant'è in sé considerato, è infinito, e questo nol potemo noi intendere».

Dall'impossibilità di un insieme ¹⁹ attualmente infinito proveniva la finitezza dell'ente con cui l'insieme era misurato, cioè del numero. Una volta definito un insieme come aggregato di unità distinte, il numero corrispondeva ad un'ulteriore operazione intellettuale che arricchiva l'insieme di una misura, e quindi di un ordine, precisando ulteriormente il carattere formale della sua concepibilità come un tutto limitato. L'insieme è contato «per unum», cioè enumerando una per una le singole e indivisibili unità che lo costituiscono. L'ultima unità contata determina il risultato finale, costituito da un'entità numerata necessariamente finita; sicché il numero finale suggella in qualche modo l'esistenza dell'insieme come totalità attuale, assegnando ad esso una concreta esistenza sulla base dell'esistenza effettiva e simultanea di tutti gli elementi numerati.

Ecco le definizioni tomiste: «Numerus est pluralitas mensurata uno»; «Quilibet numerus est multitudo mensurata per unum»; «Addit enim numerus super multitudinem rationem mensurationis». ²⁰

San Tommaso fa propria, nella *Summa theologiae*, l'allusione alla geometrizzazione del cosmo operata dalla creazione divina contenuta nel libro della Sapienza (XI, 20): «Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti», e aggiunge di stimare necessario che ogni oggetto creato sia compreso da un numero: «necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendantur». ²¹ Si potrebbe aggiungere ancora, senza tradire le sue intenzioni, che l'infinito coincide pitagoricamente proprio con la parte non «misurata», non creata del cosmo, e che è anche per questo motivo ancor più incompatibile con il numero. L'associare il numero al concetto di misura, quasi platonicamente intesa come criterio di demiurgica organizzazione del mondo, induceva quindi san Tommaso a concepire il numero infinito

come nozione contraddittoria, priva di senso, inutile e fuorviante per chiunque volesse cogliere nella perfezione della forma limitata l'insondabile perfezione di Dio.

1. Cfr. M. Périer, *À propos du nombre infini*, in «Revue pratique d'apologétique», 15 marzo 1919.
2. *Ibidem*.
3. R. Musil, *op. cit.*, pp. 146-147.
4. Cito dall'edizione italiana *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Torino, 1969, p. 132.
5. R. Musil, *op. cit.*, p. 146.
6. *Summa theol.*, Quaest. VII, Art. II.
7. *Ibidem*, Quaest. VII, Art. I.
8. *Ibidem*.
9. *Ibidem*.
10. *Par.*, XXIX, 33.
11. *Summa theol.*, Quaest. VII, Art. I.
12. *Ibidem*, Quaest. VII, Art. III.
13. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, vol. I, pp. 292-293.
14. *Teoria dei colori*, in *Opere*, vol. 5, Firenze, 1961, p. 298.
15. J.W. Goethe, *Teoria della natura*, raccolta di testi a cura di M. Montinari, Torino, 1968, p. 298.
16. *Sulla gener. e corr.*, 329 b-30. Cfr. anche E. Zolla, *Le meraviglie della natura, introduzione all'alchimia*, Milano, 1975.
17. *Summa theol.*, Quaest. VII, Art. III.
18. *Comm. Physic.*, 1.1, lect. 9.
19. San Tommaso distinse l'infinito «secundum multitudinem» dall'infinito «secundum magnitudinem». Dell'inesistenza attuale del primo si tratta in *Summa theol.*, Quaest. VII, Art. IV.
20. M. Périer, *op. cit.*
21. *Summa theol.*, Quaest. VII, Art. IV.

V

INFINITO CATEGOREMATICO E INFINITO SINCATEGOREMATICO

Il Medioevo inventò e discusse un'originale formula di distinzione tra i concetti racchiusi nell'infinito attuale e potenziale: nel settimo trattato delle *Summulae logicales* di Petrus Hispanus - abitualmente identificato con Pietro Giuliano (1226-1277) che divenne papa Giovanni XXI - si insegna a intendere l'infinito in due modi distinti: l'uno, designato dal termine «categorematico», doveva esprimere qualcosa che somigliasse all'infinito attuale, senza tuttavia identificarsi con esso; l'altro, designato dal termine «sincategorematico», doveva esprimere l'idea racchiusa nell'infinito potenziale privandola della principale ambiguità implicita nell'uso del termine «potenza».

La difficoltà contenuta nell'associazione aristotelica dell'ἄπειρον alla δύναμις era la seguente: la potenza (δύναμις) presuppone sempre un fine cui è diretta (una potenza, commentò Averroè, è definita dallo stesso termine della sua azione, e non da ciò che precede questo termine¹), e non può perciò fare a meno dell'atto. L'ἄπειρον indica invece una condizione opposta all'attualità e Aristotele precisava che l'illimitato, inteso come qualcosa che sia più grande di qualsiasi grandezza finita, non poteva esistere neppure potenzialmente.² Parlare di «infinità potenziale» poteva perciò generare confusione: il rischio era quello di anticipare comunque nel termine «infinità» un presumibile oggetto verso cui la potenzialità fosse orientata: operazione non sempre legittima, poiché il carattere indefinito dell'ἄπειρον si manifesta tipicamente in un'«apertura» incondizionata ad ogni forma di evento possibile, e quindi al disordine assoluto, alla casualità pura.

Nell'infinito sincategorematico e nelle formule che furono escogitate per designarlo era tolta ogni allusione alla potenzialità e quindi alla possibilità di realizzazione in atto che essa comporta. Nel modo in cui il concetto venne precisato successivamente da Gregorio da Rimini e da Buridano, il carattere 'aperto' dell'infinito sincategorematico, come pure la ripetitività del puro finito in cui esso consiste, si poteva caratterizzare semplicemente nella seguente circostanza: data

una quantità finita, comunque grande, esiste una quantità ancora più grande. Si può anche affermare: infinito nel senso sincategorematico è lo stesso corpo finito, poiché ad ogni corpo finito ne corrisponde uno più grande («*infinitum est corpus finitum, quia omni corpore finito esset majus corpus finitum*»).

All'opposto l'infinito categorematico era l'attributo di un soggetto che si ponesse come «qualcosa» di più grande di qualsiasi grandezza finita suscettibile di esistenza. Gregorio da Rimini insegnò a ottenere il senso dell'infinità categorematica da una pura trasposizione delle parole con cui si compone la frase che designa l'infinito sincategorematico. Da «quantocunque finito majus», ove la sincategorematicità è espressa nel porre l'accento su di un finito aumentabile, si ottiene «majus quantocunque finito», ove è sottinteso un soggetto determinato che precede la sua stessa attribuzione di infinità.³

Un esempio tra i più discussi era quello della *linea gyrativa*: Buridano la definiva un problema di assai difficile soluzione. Si pensi a un cilindro di altezza h unitaria, e lo si divida in parti 'proporzionali', cioè lo si decomponga in una successione infinita di cilindri le cui altezze formino una progressione geometrica di ragione $1/2$ (allo stesso modo in cui Zenone divise l'intervallo unitario nel primo argomento contro il moto). Sulla superficie del primo cilindro parziale si disegni un'elica di passo uguale alla sua altezza, quindi la si prolunghi sul secondo cilindro parziale, di altezza $1/4 = 1/2^2$, con un altro tratto di elica di passo $1/4$. Sull' n -esimo cilindro parziale ($n = 3, 4, 5, \dots$) si prolunghi la *linea gyrativa*, giunta fino all'($n-1$)-esimo-cilindro con diversi passi decrescenti, con un n -esimo tratto di elica di passo $1/2^n$.

Ci si può chiedere infine di che specie è l'infinito realizzato dai vari tratti di elica che percorrono complessivamente la superficie del cilindro inizialmente considerato. Nel caso si ritenga che la concepibilità dell'intero cilindro come un tutto attualmente dato determini l'esistenza della *linea gyrativa* come infinito categorematico ci si terrà autorizzati ad affermare che «la *linea gyrativa* è tracciata lungo tutte le parti del cilindro». L'eventuale attribuzione alla linea di un'infinità semplicemente sincategorematica si può invece esprimere dicendo che «lungo ogni parte del cilindro è tracciata una *linea gyrativa*». Una semplice permutazione di parole è atta così a scambiare tra loro i due opposti punti di visualizzazione della fuga dell'illimitato: l'uno consistente in un limite attuale da cui si può contemplare la potenzialità indefinita della successione ad esso orientata, l'altro incentrato, anziché su un ideale punto di arrivo, sul carattere incessante del mero processo di accrescimento.

Veniva osservato che qualora l'infinito categorematico divenisse l'attributo di un soggetto, ne scalzava perciò ogni carattere di attualità ed interezza. Non che l'infinito sincategorematico non potesse in realtà riferirsi a un soggetto,

avvertiva Petrus Hispanus, ma l'individualità di quest'ultimo veniva automaticamente frantumata da tale attribuzione e perdeva perciò ogni precisione di contorno: nell'affermazione, ad esempio, che «un'infinità di uomini sta correndo», la parola «uomini» non designa che una moltitudine confusa, e non un insieme di individui determinati; né la possibile aggiunzione di due o tre individui può mai alterare il senso dell'affermazione.

La difficoltà che Buridano osservava nell'esempio della *linea gyrativa* consisteva probabilmente nell'enigmatica sovrapposizione, in esso, delle due opposte nature dell'illimitato: l'indefinito per aggiunzione dei vari tratti finiti di elica, tipicamente sincategorematico e in sé senza soluzione, e l'infinito per divisione in parti proporzionali dell'intero cilindro che, presentandosi a priori, cioè prima della divisione, come un tutto attuale, poteva consentire all'insieme delle sue parti un attributo di infinità categorematica.

Ma non interessa ora approfondire le ragioni più riposte delle difficoltà di tali problemi né esporre le sottigliezze delle argomentazioni logiche escogitate per risolverli. P. Duhem le descrisse esaurientemente in ogni dettaglio fornendo un'ampia casistica dei problemi e degli esempi, analoghi a quello della *linea gyrativa*, su cui si esercitavano i logici di Oxford e Parigi.

Vi è un aspetto rilevante di quelle discussioni che vale tuttavia la pena menzionare. Esso consiste in una sorta di corrispondenza e mescolanza, spesso appena accennata o lasciata trasparire, tra l'infinita potenza di Dio e l'indefinitezza dell'ἄπειρον. Nelle argomentazioni logiche l'intervento divino veniva frequentemente inserito nel gioco delle eterne assurdità provocate nella realtà delle forme dal potere dissolvente del falso infinito; e di quest'ultimo seguiva gli interminabili passi successivi, secondo la logica del divenire, talvolta orientato a un'immaginaria soluzione costituita dalla forma per eccellenza: l'infinito in atto. In tal modo l'illimitatezza dell'ἄπειρον cominciava a manifestarsi come un plausibile segno, nel mondo, dell'esercizio immanente dell'illimitatezza divina; confusione rischiosa, perché l'infinito di Dio e l'infinito dell'ἄπειρον dovrebbero pur mantenere evidenti le loro opposte nature per chiunque si ponga nell'angolo visuale, pur illusorio, del dualismo fondamentale di male e di bene, di illimitato e di limite, di negativo e di positivo.

Si potrebbe obiettare che la potenza divina è tale appunto per questo: ove incontra un illimitato essa lo risolve in unità formale e lo fa esistere come infinito attuale; e con ciò il suo esercizio è legittimo e non contraddittorio, perché così operando il divino non si mescola alle aporie del falso infinito, ma anzi le fa sparire col suo intervento risolutore. Ma non sempre accadeva, in realtà, che apparisse chiaramente l'unità formale ove interveniva il deus ex machina della onnipotenza di Dio: talvolta rimaneva

evidenziata la pura estensione illimitata della grandezza e non si insisteva abbastanza sul miracolo della forma che avvolge ogni cosa esistente per quanto grande essa sia, anzi proprio in opposizione alla sua grandezza.

Gregorio da Rimini, ad esempio, divise l'unità di tempo (ad esempio un'ora) in parti proporzionali (*partes proportionales*) di lunghezze: $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ..., $1/2^n$, ..., esattamente come Zenone aveva diviso per dicotomia il segmento unitario; e immaginò che Dio potesse creare in ciascuna porzione di tempo una pietra. È evidente, egli concluse, che alla fine di un'ora Dio avrà creato una pietra infinitamente grande.

L'esempio è simile, in fondo, a quello della *linea gyrativa* nel senso che entrambi associano a ciascuna parte 'proporzionale' una quantità archimedeica, che sommata a se stessa infinite volte genera una quantità superiore a qualsiasi quantità finita assegnata. Ma i due esempi sono anche dissimili: mentre nel caso della *linea gyrativa* la descrizione è puramente geometrica, la creazione di una pietra per ogni parte proporzionale di un'ora richiede al contrario un esplicito e diretto intervento divino che infranga almeno provvisoriamente le stesse leggi della creazione, consistenti in una contrazione dell'infinità di Dio nei limiti della forma, ovvero in una correzione, istante per istante, dell'indeterminatezza dell'ἄπειρον mediante i precisi contorni di una figura assegnata.

La 'dimostrazione' di Gregorio da Rimini pretendeva evidentemente che la potenza di Dio potesse rivelarsi nell'assurdità di una materia infinitamente dilatata, e che l'infinito attuale si realizzasse nella tangibilità di un simile prodigio. Zenone aveva trattato un esempio consimile, ma la sua distanza da Gregorio da Rimini è enorme. Zenone aveva affidato al potere dissolvente dell'illimitato l'annientamento del limite rivelato dall'esperienza sensibile e dai corollari della ragione (e per questo la negatività dell'ἄπειρον era indispensabile); egli aveva indicato in tal modo l'immobilità dietro il velo di una realtà illusoria regolata dal reciproco confronto del limite con l'illimitato. A Gregorio da Rimini la negatività dell'ἄπειρον non serve più. Questa negatività si muta nel suo opposto, cioè nella positiva affermazione di una crescita illimitata capace di concludersi, di per sé, nella perfezione di una forma immanente. La teologia negativa dell'ἄπειρον di Zenone trapassa così nell'evidenza sensibile: ciò che Gregorio da Rimini ottiene è una pietra infinitamente *grande*, e questa connotazione di grandezza è il segno emblematico di un'avvenuta esteriorizzazione del mistero dell'infinito.

Ma che c'è di male nel fatto che una cosa sia o divenga *grandezza*? Plotino (*VI Enneade*, 6, I, trad. it., Bari, 1973, pp. 286-287) aveva già risposto a questa domanda ricordando che «ognuno esiste in maggiore pienezza non già quando sia

molteplice o grande ma quando appartenga a se stesso»; cioè «sia proteso su se stesso», sulla propria «interiorità». «Per colpa della grandezza» egli aveva scritto «e in quanto si trova nella grandezza, l'essere incorre nella rovina di se stesso; e solo quando possiede unità possiede se stesso». L'Universo era bello, per Plotino, *nonostante* fosse grande; e proprio in grazia del costante abbraccio dell'Uno la sua fuga verso l'illimitato non degenerava in pura dissipazione.

La rottura del limite poteva essere vista in due sensi strettamente collegati: il senso più evidente, quello della crescita a dismisura di una grandezza (la pietra), dipendeva dalla capacità divina di superare la soglia minima di tempo richiesto da ogni intervallo finito del divenire; perché si presumeva che Dio non fosse obbligato, nell'atto creativo, a rispettare il minimum archimedeo necessario alla sussistenza di una qualsiasi forma, di una qualsiasi azione finita. È evidente che, una volta proclamato lecito il sorpasso della soglia minima, questo trascinava con sé la possibilità dell'infinitamente grande; e quest'ultimo diventava un simbolo dell'onnipotenza divina, mentre si sarebbe quasi indotti a pensare che il limite cominciasse da qui a configurarsi come la controparte negativa di tale onnipotenza, come l'ostacolo alla sua esplicazione: la più ovvia delle argomentazioni vuole che l'opposto negativo dell'infinità di Dio sia la finitezza, il limite.

Si potrebbero citare altri esempi: N. Bonet, strenuo difensore della possibilità di un'esistenza effettiva dell'infinito in atto sosteneva che «la forza produttiva del primo Motore si estende alla produzione degli infiniti numerici»⁴ (cioè degli infiniti «secundum multitudinem»). Né la potenza di Dio poteva limitarsi alla creazione di un infinito in atto relativo («infinitum secundum quid»), ma poteva senza dubbio estendersi agli infiniti attuali assoluti («infinitum simpliciter»).

Molte delle argomentazioni allora in uso nelle scuole di Oxford e Parigi pro e contro l'infinito attuale furono in seguito raccolte da Jean Mair nel suo *Propositum de infinito*, scritto nei primi anni del '500. Ivi si accenna, anzitutto, al fatto che Dio può produrre un corpo di grandezza indefinitamente crescente, perché in caso contrario dovrebbe esistere assurdamente un corpo finito cui Dio non potrebbe aggiungere neppure un corpo d'un piede («quocunque corpore finito creato Deus potest creare maius, aliquin oportet dare unum corpus finitum cui Deus non potest addere unum corpus pedale»).

L'asserzione è di una certa ovvietà perché è abbastanza naturale non negare l'esistenza di una grandezza sincategoricamente infinita. Meno ovvia e più significativa è l'insistenza sull'assoluta e perfetta onnipotenza di Dio per giustificare la validità della tesi; e ancor meno ovvia è l'invocazione della stessa onnipotenza per difendere la credibilità

di una grandezza categoricamente infinita, oppure di un insieme infinito, in senso categorematico, di oggetti separati e senza rapporto di continuità.

Così scrisse Jean Mair secondo l'uso acquisito di ottenere l'infinito sincategorematico da quello categorematico, o viceversa, mediante una semplice permutazione di parole: «Prima veritas: infinite magnum corpus Deus potest producere. Secunda veritas: Deus potest producere corpus infinite magnum. Tertia: Deus potest producere infinitum multitudine rerum separatarum nec continuo inherentium».⁶

Per corroborare questa lapidaria confutazione delle tesi aristoteliche e tomiste Jean Mair usò argomenti non dissimili a quelli già utilizzati da Gregorio da Rimini e da chiunque aveva allora difeso l'esistenza dell'infinito in atto, ivi compresa la possibile creazione di una pietra in ogni parte proporzionale di un'ora.

Va comunque osservato che la compatibilità di un infinito in atto nel mondo creato non costituiva di per sé una profonda frattura con le ragioni più riposte che ispiravano nel pensiero greco-tomista la tesi contraria: quella dell'infinità esistente come pura potenza.

Jean Mair, come del resto G. da Rimini, intese anche descrivere la perfezione della forma in un modo non troppo dissimile da chi la intese come il limite di un'infinità. Quando egli sostiene che ogni corpo avente un insieme infinito in parti (s'intende proporzionali) è un infinito in atto («omne corpus habens infinitas partes est infinitum actu»),⁷ non fa che alludere, anche se in modo logicamente discutibile, a una verità tutt'altro che improbabile o incomparabile con le tesi tradizionali. I Pitagorici, affermando che in ogni cosa c'è il limite e l'illimitato, avrebbero pur potuto ammettere una loro possibile configurabilità, in ogni corpo, come l'insieme indefinito delle parti proporzionali e la totalità attuale che le contiene. Quanto ad Aristotele, pur non accettando l'infinito in atto, accennava lui stesso alla possibile limitazione dei processi all'infinito.⁸ Non diversamente Plotino aveva poi lasciato intendere che il limite non può essere limite altro che di un'infinità.⁹

La formula angelica *ave gratia plena*, pensò J. Mair,¹⁰ è una diretta allusione alla forma perfetta come infinità attuale, punto di riferimento e di confronto per le partecipazioni parziali, imperfette e necessariamente finite alla grazia suprema.

Duns Scoto aveva anticipato J. Mair con un argomento non dissimile (*Sent.*, lib. III, dist. XIII. Lyon, 1639, Durand, t. VII, 1), anche se privo di esplicite allusioni alla compatibilità logica di un infinito attuale. Argomentando sulla grazia e sulla possibilità di accrescerla indefinitamente egli giunse alla conclusione che esiste una grazia perfetta, non suscettibile di ulteriori accrescimenti. E così pure di ogni forma cui si possa attribuire

un'intensità crescente o decrescente. Ad esempio i colori: il bianco perfetto è in un certo senso di intensità infinita, perché appare come il punto all'infinito di un'illimitata successione di gradazioni approssimanti e tese al raggiungimento della forma definitiva. Il richiamo ad Aristotele è esplicito: «ciò che può essere in atto è la misura di ciò che può essere in potenza»; ed è perciò inevitabile ipotizzare per ogni forma un limite invalicabile che sussiste simultaneamente a tutti i gradi intermedi, tale da costituirne anche il principale criterio di gerarchia. L'allusione alla priorità aristotelica dell'atto è qui usata come preludio al capovolgimento della tesi aristotelica sull'inesistenza dell'infinito. Atto e infinito sono quasi in accordo.

La difesa dell'infinito attuale non fu però l'unica ragione di rottura con la tradizione. In realtà, anche in chi si limitava, in accordo con Aristotele o san Tommaso, a difendere la sola esistenza dell'infinito sincategorematico, il travalico del confine in cui il mondo era stato fino allora circoscritto era chiaro ed evidente. Anzi, se si smetteva di intendere il carattere 'aperto' dell'infinità sincategorematica come controparte negativa del mondo perfettamente «limitato» creato da Dio, e lo si usava come positivo ricettacolo della progressiva esplicazione della potenza divina, il senso dell'innovazione era ancora più trasparente: la stessa idea tradizionale di un mondo considerabile «sub specie aeternitatis» solo in quanto intuibile come totalità limitata (Wittgenstein l'avrebbe ancora ripetuto nel *Tractatus*) era capovolta nell'immagine di un Universo in cui il segno divino corrispondeva alla sua espansione illimitata.

Fu un francescano del XIII secolo, Riccardo di Middleton, tra i primi ad ammettere che l'Universo può espandersi al di là di ogni limite attualmente assegnato, senza che ciò dovesse implicare l'idea di un mondo attualmente infinito. Conformemente a tale ispirazione egli sostenne anche la possibilità di una pluralità di mondi e la possibilità, da parte di Dio, di imprimere al cielo delle stelle fisse, tradizionalmente concepito come fisso, un movimento di traslazione rettilinea.¹¹

Per Riccardo di Middleton «Dio può produrre una grandezza e una dimensione che cresca oltre ogni confine, a condizione che in ogni istante la grandezza già realizzata attualmente sia finita: nello stesso modo che Dio può dividere indefinitamente un continuo in parti la cui grandezza finisca per cadere al di sotto di ogni limite, a condizione che non esista mai attualmente un numero infinito di parti realmente divise».¹²

Gilson definisce questa tesi un risultato inatteso della condanna del peripatetismo arabo, nel 1277, ad opera di Étienne Tempier, vescovo di Parigi, evento, questo, che P. Duhem non esita a classificare come il primo atto di nascita della scienza moderna e Gilson, più cautamente, vede in ogni caso come il primo segno della possibilità di concepire il mondo, nell'ambiente

cristiano, conformemente alle teorie cosmologiche moderne.

La condanna di alcune di queste proposizioni fu certamente di non poco rilievo anche per l'uso futuro che si sarebbe fatto, nella matematica, dell'infinito: la nascita della cosmologia moderna coincise con le prime trasgressioni del divieto aristotelico di utilizzare infiniti e infinitesimi nelle dimostrazioni della geometria e dell'aritmetica.

La ventinovesima delle proposizioni condannate è in particolare di grande importanza, perché può riferirsi alla possibilità divina di creare e far sussistere l'infinità nel mondo del divenire e del mutamento. La tesi averroista dice testualmente che l'infinito di Dio può essere compatibile solo con la sua totale estraneità al divenire dell'Universo e che ogni manifestazione immanente di tale infinità non è rinvenibile se non nella perfezione della forma: «Quod Deus est infinitae virtutis in duratione, non in actione, quia talis infinitas non est nisi in corpore finito, si esset».¹³

La tesi era del resto collegabile a un tipico aspetto della dottrina averroista che imponeva l'esistenza di cause intermedie tra l'assoluta immobilità di Dio e la mutevolezza delle cose create. Un'altra delle proposizioni condannate asseriva infatti che «il Primo Principio non può essere la causa quaggiù di effetti differenti che mediante altra causa, perché nulla di ciò che tramuta può effettuare dei mutamenti di diversi tipi, senza essere essa stessa mutata».¹⁴

Che cosa implicava la condanna di queste proposizioni? In primo luogo si proclamava ufficialmente la compatibilità di un intervento 'diretto' di Dio nel mondo con il carattere finito e limitato di quest'ultimo. In secondo luogo qualche incauta affermazione della possibile esplicazione dell'infinità divina «in tempore et actione» avrebbe ben potuto incoraggiare avventate quanto imprevedibili innovazioni, con il rischio principale di compromettere il carattere finito e archimedeo delle forme. Da ciò il possibile avvento di tesi e dimostrazioni sulla presenza, nel mondo, dell'infinito attuale e potenziale inteso come positiva esplicazione dell'infinito trascendente, e la conseguente perdita dell'ἄπειρον come sinonimo di male metafisico, come assurdità, come non essere, e, proprio per questo suo carattere antinomico, come allusione segreta al «Deus absconditus». Come suggerì Erwin Panofsky in riferimento ai mutamenti stilistici nella rappresentazione dello spazio già risalenti al gotico e romanico, perfino l'avvento delle tesi scolastiche sull'infinità di Dio fu in qualche modo il preludio a un autentico ἐνεργεῖα ἄπειρον trasferito dalla sfera soprannaturale a quella naturale.¹⁵ E se si volesse risalire fino all'origine dell'invincibile vocazione alla ricerca dell'infinito non sarebbe inutile spostare l'attenzione su quello che venne definito da A.O. Lovejoy «principio di pienezza». Questo principio, che a giudizio dell'autore di *The Great Chain of*

Being governa segretamente molta storia del pensiero dell'Occidente, allude, come egli spiega, all'universo come *plenum formarum* in cui trova esauriente esemplificazione la serie di tutte le possibili varianti di *generi* di cose viventi; e si fonda anche «sul presupposto che nessuna vera potenzialità dell'essere possa restare inattuata, che l'estensione e la ricchezza della creazione debbano essere tanto grandi quanto la possibilità di esistenza, e proporzionati alla capacità produttiva di una Fonte 'perfetta' ed inesauribile, e che il mondo tanto è migliore quante più cose contiene».¹⁶ Di questa urgenza di colmare ogni vuoto interstizio della realtà, ogni barlume del possibile, Lovejoy ravvisa alcune tracce fin nei dialoghi di Platone, e negli scritti di Aristotele; e non potrebbe essere descritto proprio come un'*estrapolazione* all'infinito di questo principio il contenuto di molte successive affermazioni dell'esistenza dell'infinito attuale?

1. P. Duhem, *op. cit.*, vol. VII, p. 72.

2. *Fisica*, 206 b 20.

3. P. Duhem, *op. cit.*, p. 63.

4. *Ibidem*, pp. 129-130.

5. *Le traité «De l'infini»*, a cura di H. Élie, Paris, 1938, p. 92.

6. *Ibidem*, p. 90.

7. *Ibidem*, p. 8.

8. *Metafisica*, 994 b 9.

9. *VI Enneade*, 6, III, Bari, 1973, p. 288.

10. *Op. cit.*, p. 102.

11. Cfr. É. Gilson, *La philosophie au Moyen-Âge*, Paris, 1952; trad. it. *La filosofia nel medioevo*, Firenze, 1973, pp. 555-556.

12. *Ibidem*, p. 555.

13. Cfr. B. Nardi, *Saggi sull'aristotelismo padovano dal secolo XIV al XVI*, Firenze, 1958, p. 185.

14. Cfr. É. Gilson, *op. cit.*, p. 671.

15. Cfr. E. Panofsky, *Die Perspektive als «symbolische Form»*; trad. it. *La prospettiva come forma simbolica*, Milano, 1976, p. 55.

16. *La grande catena dell'Essere*, Milano, 1966, p. 57.

VI

GIORDANO BRUNO, NICCOLÒ CUSANO, RAIMONDO LULLO

Affermando che a partire dal Rinascimento gli infinitesimi e le quantità non archimedee furono reintrodotte nell'uso matematico e che ciò avvenne a vantaggio dell'innovazione ma anche a scapito della correttezza formale delle dimostrazioni, si direbbe una cosa esatta; ma anziché cogliere il senso complessivo di una verità si estrarrebbe da questa un semplice frammento: quello ritenuto più idoneo ad essere collocato nella storia di una matematica incessantemente ispirata dall'urgenza di una rigorosa descrizione linguistica dei propri concetti e delle proprie libere costruzioni.

Può accadere, in realtà, che l'insostenibilità logica di un discorso matematico, proprio perché tale, contenga il seme di una qualche verità, o addirittura che questa stessa illogicità si tramuti nella imprescindibile caratteristica dell'unico segno visibile di idee o di realtà inaccessibili.

Simone Weil non andò lontano dal vero scrivendo che «l'invenzione matematica è trascendente», e che «essa procede per analogie assolutamente non rappresentabili, di cui si possono solo constatare le conseguenze».¹ Abbastanza singolare è l'accordo di questo punto di vista, certamente estraneo alle regole canoniche del moderno esercizio matematico, con la critica formulata da Brouwer all'indirizzo logicista della matematica: il primo atto dell'intuizionismo matematico rende del tutto indipendente la matematica dal linguaggio che la esprime, e ne fa un'attività autonoma della mente: «Nell'edificio del pensiero matematico... il linguaggio non svolge altro ruolo che quello di una tecnica efficiente ma mai infallibile o esatta per memorizzare costruzioni matematiche e suggerirle ad altri».² In altre parole: in un senso che si potrebbe definire «assoluto» i più riposti meccanismi dell'invenzione matematica sono linguisticamente irrepresentabili.

All'esistenza di un 'quid' discorsivamente imprendibile si può quindi naturalmente contrapporre l'ultima risorsa di un'arte descrittiva basata sul paradosso, sull'apparente incongruenza, sull'enigma matematicamente rappresentabile da configurazioni incompatibili con qualsiasi rigore razionale: è l'arte della «dotta

ignoranza» di Niccolò Cusano, nonché l'ultima giustificazione della teoria dei minimi geometrici di Giordano Bruno.

Per rappresentare matematicamente l'infinito, si preferì allora un linguaggio che ne esibisse i caratteri anche al prezzo di inesattezze formali incompatibili con una matematica che dovesse svilupparsi nell'ambito della pura razionalità. D'altronde, solo per citare alcuni esempi, R. Lullo aveva suggerito che alla matematica dovesse spettare anche il compito di descrivere concetti appartenenti alla sfera dell'intellettualità, e non solo alla sfera della razionalità.³ Averroè aveva dichiarato che la matematica doveva considerarsi una disciplina volta allo studio e alla comprensione delle cause formali, e quindi degli archetipi.⁴ G. Bruno aveva rispettato in fondo l'intenzione platonica di porre nello studio dei numeri e delle forme geometriche il punto di collegamento tra il mondo sensibile e il mondo intelligibile delle idee: egli collocò la matematica tra la fisica e la metafisica.⁵

Nelle costruzioni geometriche di R. Lullo e specialmente in quelle di N. Cusano è continuamente presente l'antinomia come richiamo all'assoluto inesprimibile. L'illogico, il non-razionale, ciò che non si può concretamente vedere disegnato su un foglio di carta sono intenzionalmente esibiti come entità di cui solo l'intelletto, la «mens tuens», può cogliere la natura e l'essenza: l'intelletto 'vede' ciò che gli occhi non possono distinguere e ciò che la mano non sa disegnare.

G. Bruno spiegò la stessa cosa. Egli capì che se l'antinomia è la rivelazione del vero infinito in atto quest'ultimo è necessariamente incompatibile con il mondo delle forme; se di infinito in questo mondo si può parlare, si tratta inevitabilmente dell'illimitato, dell'infinito potenziale. «... Della divina sostanza,» egli scrisse «sì per essere infinita, sì per essere lontanissima da quelli effetti, che sono l'ultimo termine del corso della nostra discorsiva facultade: non possiamo conoscer nulla se non per modo di vestigio come dicono i Platonici, di remoto effetto come dicono i Peripatetici, di indumenti come dicono i Cabalisti, di spalli o posteriori come dicono i Talmudisti, di specchio, ombra, et enigma come dicono gli Apocaliptici».⁶

Il punto invisibile intorno a cui la nostra discorsività si sforza di ripetere e riformulare le sue verità parziali, ovvero l'irraggiungibile infinità attuale, costringe ogni altro infinito accessibile ai sensi o alla pura razionalità a una fatale partecipazione alla potenza e alla materia; sicché è inevitabile che «la nostra potenza intellettuale non può apprendere l'infinito se non in discorso, o in certa maniera di discorso, com'è dire in certa ragione potenziale o aptitudinale, è come colui che s'amena a la consecuzione dell'immenso onde vegna a costituirse un fine dove non è fine».⁷

È stato scritto da alcuni che Bruno confuse la vera infinità con l'indeterminatezza del falso infinito. Vero è invece il contrario, e

B. Spaventa lo dimostrò in un saggio che contiene altresì una lucida descrizione dei significati dell'infinito.⁸

I gradi della conoscenza si dispongono per Giordano Bruno in una successione di crescente perfettibilità che, partendo dall'uso dei sensi, si articola progressivamente nella ragione, nell'intelletto e infine nella mente. Mentre la discorsività razionale non fa che aggiungere il finito al finito dibattendosi entro i limiti di un'infinità sincategorematica, chi eserciti le facoltà dell'intelletto e soprattutto della mente realizza un salto qualitativo che annulla l'imperfezione dell'illimitato in una semplice intuizione che «*senza niun discorso che la preceda o accompagni...*, comprende tutte le cose, ed è simile a specchio vivo e piano, che è insieme luce, specchio e tutte le immagini, che ei veggono senza successione temporale o vicissitudinale, come se il capo fosse tutt'occhio o da per tutto la vista abbracciasse con un sol atto le cose superiori, inferiori, anteriori e posteriori».⁹ Il raggiungimento dell'attualità infinita si svolge perciò in un istante; e l'istantaneità è l'unica durata che le si addice, poiché essa non può mai configurarsi come l'ultimo termine di uno sviluppo potenziale. Ogni successione che la preceda non la riguarda perché non la condiziona in alcun modo.

Nel dialogo *De l'infinito, universo e mondi* è tratteggiata in cinque parole la paradossale corrispondenza tra l'infinità potenziale cui la nostra imperfezione ci costringe e l'infinità attuale limitante che la racchiude: l'essenza divina è ivi descritta come «termino interminato di cosa interminata», e di questa perfetta definizione Giordano Bruno cerca di svelare il senso precisando ulteriormente: «Termino, dico, senza termine, per esser differente la infinità dell'uno da l'infinità dell'altro».¹⁰ E in che cosa consiste questa differenza? «Io dico» prosegue Bruno «l'universo tutto infinito, perché non ha margine, termine, né superficie, dico l'universo non essere totalmente infinito, perché ciascuna parte che di quello possiamo prendere, è finita, e de mondi innumerabili che contiene, ciascuno è finito. Io dico Dio tutto infinito, perché da sé esclude ogni termine ed ogni suo attributo è uno ed infinito, e dico Dio totalmente infinito, perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente: al contrario dell'infinità de l'Universo, la quale è totalmente in tutto, e non in queste sue parti... che noi possiamo comprendere in quello».¹¹

La ragione di questa differenza, aveva spiegato il Cusano (*De docta ignorantia*, II, 1-4), risiede nel fatto che l'unità dell'Universo (in virtù della quale Bruno può chiamarlo un «tutto») non è affrancata dalla pluralità, cioè dalla materia; e la materia, come aveva già insegnato san Tommaso, determina una contrazione della forma infinita nelle forme finite dell'esistenza. Il risultato è un certo 'difetto' intrinseco, una insopprimibile presenza, nell'Universo, di una possibilità che non può estendersi

oltre di sé: l'atto infinito non può essere originato dall'indefinita tensione di una potenzialità perennemente esistente e orientata al superamento di se stessa. Sarebbe come affermare che la falsa infinità, l'ἄπειρον di Aristotele, potrebbe generare ciò che metafisicamente e logicamente lo precede: il vero infinito dell'imperscrutabile Non-Essere. Sarebbe equivalente sostenere che il desiderio, che è la più comune incarnazione del falso infinito, è in grado di procurare l'ottenimento del suo più vero e invisibile oggetto, il quale non è accessibile, sicuramente, se non dopo la preventiva soppressione di ogni desiderio. Aveva quindi concluso il Cusano: «Sebbene... l'Universo possa essere ancora più grande per l'infinita potenza di Dio, che è senza limiti, tuttavia per la resistenza della possibilità di essere o per la materia, che non si può estendere in alto all'infinito, l'Universo non può essere più grande».¹²

La perfezione divina è comunque il «termino interminato di cosa interminata», il limite estremo di ogni illimitatezza; infinito anch'esso, ma proprio in virtù dell'assoluta trascendenza rispetto a quell'infinità di cui è il termine insuperabile.

L'infinità attuale era già stata descritta dal Cusano come il massimo assoluto, definito come «ciò che non può essere più grande», cioè come l'estrema configurazione di stabilità, di riposo assoluto, in cui scompare ogni possibilità di successivi aumenti e diminuzioni: il vero infinito è l'autentica risoluzione del «più e meno», del «grande e piccolo» (μέγα καὶ μικρόν) con cui Platone designò l'infinito potenziale, ed è per questo motivo che in esso cessa di esistere ogni proporzione e confronto. Scrisse il Cusano¹³ che «un tale massimo che è l'esemplare assoluto, non può essere maggiore o minore di qualunque esemplato si possa dare».

Ma nell'espressione «termino interminato di cosa interminata» si possono anche leggere significati indotti, conformi alla scelta di un angolo visuale in cui l'idea di perfezione contenuta nell'invisibile soluzione di ogni illimitato suggerisce il potere limitante, circoscrivente, di Dio. Il Cusano,¹⁴ accogliendo una tesi di Melisso, aveva scritto che è ovunque rinvenibile una doppia infinità: un'«infinità finiente» e un'«infinità finibile», e che dall'azione limitante della prima sulla seconda nasce l'ente finito dal principio infinito. Dio è il termine infinito di ogni illimitatezza anche in quanto è creatore di forme, perché ogni forma, come avevano già intuito i Pitagorici, è il limite di un'infinità.

L'adesione di Bruno all'infinità dell'Universo non esclude mai, in fondo, il rispetto della tesi aristotelica dell'irraggiungibilità della grandezza attualmente infinita e del carattere di pura potenzialità degli infiniti concepibili dalla ragione.

Vero è tuttavia che nella religiosità lucreziana di Giordano Bruno e nella sua percezione di un vuoto illimitato pieno di innumerevoli nuclei carichi di potenza creatrice, si avverte il

senso dell'infinito come un'autentica liberazione; ed è innegabile che la sua confutazione dell'idea aristotelica di una «natura essenzialmente statica, mutantesi solo entro i limiti insuperabili di forme sostanzialmente e teleologicamente permanenti»¹⁵ assume toni più che mai aspri e decisi. Il senso religioso del limite e della sua pienezza simbolica è probabilmente inferiore a quello del modello greco, anche se mai accade, in ogni caso, che Giordano Bruno indulga sulla banalità di una celebrazione dell'estensione infinita pura e semplice, sull'idea del sublime come prodotto di una dimensione indefinitamente dilatata. «Come la grandezza di Dio» egli scrive «non consiste nella dimensione corporale in modo alcuno..., cossi la grandezza del suo simulacro non doviamo pensare che consista nella maggiore e minore mole di dimensioni».¹⁶

L'infinità dell'Universo è per Bruno il prodotto dell'infinità di Dio, che non potrebbe ragionevolmente circoscrivere la sua onnipotenza nei limiti di uno spazio chiuso e in una molteplicità finita di sostanze. Questo, si è visto, era già stato il risultato della condanna da parte della teologia cristiana delle tesi della filosofia aristotelica e averroista, dalla cui ispirazione proveniva l'ammirazione di un ordine cosmico fondato sul limite e un conseguente «horror infiniti» che non era se non l'indicazione della fatale imperfezione e falsità di ogni infinito che si volesse scorgere nella natura creata.

Ma per Bruno l'infinito di Dio è riconoscibile più come enigma insondabile che come estremo raggiungimento dell'illimitato sviluppo di un'infinità potenziale: ciò che ci consente di penetrarne il mistero non è tanto la semplice percezione di un mondo sconfinato, quanto piuttosto la lettura del più riposto significato dei segni soprannaturali di cui tale mondo è intessuto. Così pure la scoperta copernicana, come rivelò F.A. Yates, fu per Bruno essenzialmente il pretesto per una nuova descrizione geroglifica della Creazione ispirata a motivi ermetici; e non costituì in nessun modo l'attesa prova scientifica di una celebrata infinità dell'Universo.

La scrittura geroglifica per eccellenza, capace di illustrare in segni visibili della più astratta ed essenziale trasparenza i misteri racchiusi negli archetipi, fu attuata tuttavia solo nelle forme pure della matematica e delle immagini geometriche. La matematica non fu per Bruno una scienza autonoma da cui estrarre a posteriori il supporto metaforico per la comprensione di verità metafisiche; essa costituì piuttosto fin da principio una parte della filosofia contemplativa, una scienza delle cause formali, un'arte di conoscenza a priori dei principi, come lo fu già per Niccolò Cusano o Raimondo Lullo.

Niccolò Cusano aveva ad esempio illustrato geometricamente l'infinito attuale nel concetto di rettitudine, o meglio nella paradossale soluzione finale del curvo nel retto. La linea retta

gode infatti di una proprietà 'limite' simile a quella con cui si potrebbe definire il substrato assoluto di ogni accidente: nel retto sparisce infatti ogni «curvità», cessa di esistere il «più e meno» di ciò che può essere più o meno curvo; in termini equivalenti l'indefinita apertura dell'infinità potenziale a incessanti aumenti o diminuzioni si risolve nell'unica configurazione geometrica ove non si dà più alcun aumento né alcuna diminuzione.



Quando si afferma che l'Assoluto è misura di tutte le cose si allude alla stessa verità che si enuncerebbe affermando che il retto è misura di ogni obliquo. Nel «più e meno» è implicito infatti un criterio di misura che postula l'esistenza di un'entità invisibile rispetto a cui si può dire «più» o «meno», e che non è, essa stessa, né «più» né «meno» di altro. Il curvo è più o meno curvo a seconda della sua minore o maggiore aderenza alla retta, cioè a un ente privo di ogni caratteristica di curvità.

Quand'è che il curvo giunge a coincidere con il retto? Non si può immaginare questo risultato come evento fisicamente o razionalmente verificabile, né come configurazione geometrica attualmente raggiungibile, perché la linea retta non è mai l'ultimo termine di una successione indefinita di linee sempre meno curve. La retta è tuttavia l'inevitabile ultimo termine di riferimento, di misura, di confronto per l'infinità delle linee curve.

Lo stesso dicasi per la quadratura del cerchio, che non è intuibile se non con l'occhio che trascenda le possibilità dei sensi e della ragione. «Quelli che hanno cercato la quadratura del circolo» scrisse il Cusano¹⁷ «hanno presupposto la coincidenza del circolo e del quadrato nell'uguaglianza che, certamente, non è possibile nelle figure sensibili. Nella materia, infatti, non si può costruire un quadrato che non sia disuguale da ogni circolo dato. Essi non hanno intuito una tale uguaglianza - da essi presupposta - con gli occhi della carne, ma con quelli della mente, e si sono sforzati di farla vedere razionalmente. Ma, poiché la ragione non ammette la coincidenza degli opposti, hanno mancato nel loro intento. La coincidenza doveva essere cercata con l'intelletto in quel circolo che è uguale in tutti i poligoni, uguale anche a un altro poligono che ha un perimetro diverso. E, allora, essi avrebbero raggiunto l'intento».

Così è con l'occhio dell'intelletto che occorre indagare sulla circostanza razionalmente inimmaginabile della coincidenza del

curvo con il retto. Questa può avvenire in due situazioni solo apparentemente distinte: nell'infinitamente grande e nell'infinitamente piccolo. Nel primo caso si può immaginare una circonferenza che al crescere indefinito della lunghezza del suo raggio tende a confondersi con una qualsiasi retta ad essa tangente. Nel secondo caso si può pensare di restringere all'infinito l'arco di una circonferenza fino a che esso non si distingua dalla corda che lo sottende. La perfezione matematica consiste in questa reciproca commensurabilità e confrontabilità (adaequatio) tra ciò che è retto e ciò che è curvo. L'intuizione intellettuale cui è necessario fare ricorso coglie allora ciò che non esiste come limite concreto: «È necessario» scrive il Cusano «che io ricorra alla visione intellettuale, che giunge a vedere la minima ma non assegnabile corda coincidere col minimo arco». ¹⁸ L'intelletto non può fare a meno di stimare necessario ciò che esso sa non essere dimostrabile in una figura leggibile, poiché «né arco, né la corda (quando siano quantità) possono essere semplicemente minime in atto, in quanto il continuo è sempre divisibile». ¹⁹

Giordano Bruno percorre le stesse verità, insistendo in particolare sull'opposizione tra retto e curvo, visti come sinonimi dei termini costituenti ogni fondamentale bipolarità dell'esistenza. Egli insiste, come il Cusano, sulla coincidenza del minimo arco di circonferenza con la minima corda, e sull'esistenza di una comune invisibile unità di misura del retto e dell'obliquo.

Lungi dal poter essere considerata un'imprecisione matematica o una esplorazione precoce nel regno dell'analisi, questa non è che l'illustrazione degli ultimi principi metafisici mediante gli unici termini descrittivi con essi compatibili sul piano dell'astrattezza e della semplicità.

Nelle *Praelectiones geometricae*, ad esempio, è detto che in uno o due punti contigui non è distinguibile il retto dal curvo, mentre la differenza tra ciò che è curvo e ciò che non lo è comincia a trasparire dalla diversa configurazione di tre punti contigui.



A



B



C

Una trasposizione analogica svela il senso dell'immagine geometrica: allo stesso modo in cui esiste un minimo geometrico (i due punti contigui) che è elemento d'indifferenza per chiunque voglia distinguere il retto dal curvo, essendo esso identico nei due casi, così è intuibile un antecedente alla varietà delle forme, un'entità sostanziale assimilabile alla quantità pura, non ancora

solcata dalle reciproche distinzioni dei generi e delle specie; questa è identica alla ὁρίστος δυάς di Platone, cioè all'archetipo di ogni dualità, ed è perciò rappresentabile nel «minimum» geometrico dei due punti contigui.

La forma comincia invece a manifestarsi nelle costruzioni operabili con tre punti. Il tre è il ritorno dell'unità dopo l'illimitatezza del due, ed è perciò l'archetipo di ogni forma considerata come entità limitante, come argine alla forza dissolvante racchiusa nell'ἄπειρον.

Nell'*Idiota triumphans*²⁰ è scritto che nella divisione all'infinito di un oggetto si perde prima il senso della sua qualità, cioè della sua integrità formale, che del suo substrato quantitativo, che è pur sempre l'insopprimibile condizione della sua esistenza, sicché ciò che è determinato secondo la forma non è ancora terminato secondo la materia («determinatum secundum formam, nondum est terminatum secundum materiam»): varcato il limite di riconoscimento di ciò che è curvo, è ancora definibile il «minimum» geometrico che è comune al curvo e al retto ed è principio di ogni linearità, cioè di ogni esistenza nell'ambito della quantità e della molteplicità.

Tutte le linee geometriche, scrive Bruno, che si dispongono via via secondo i generi e le specie, sono composte dal retto e dal circolare, elementi costitutivi di tutte le immagini, di tutte le figure e di tutti i caratteri.²¹

Tre punti non allineati definiscono un triangolo; ed ecco che il triangolo è l'archetipo di ogni forma del piano, come la piramide lo è di ogni forma dello spazio;²² la causa efficiente di ogni creazione formale, il fuoco, era per Platone costituito da minimi elementi di forma piramidale.

Nel *De minimo* il triangolo e il cerchio sono descritti come i principi di tutte le figure, in quanto costituenti una bipolarità assimilabile a forma e materia, atto e potenza, limite e limitabile (cioè illimitato).²³

Alcune affermazioni di Bruno sulla potenza contenitrice della circonferenza di tutte le figure poligonali, di cui la prima e la più lontana dalla figura circolare è il triangolo, ricordano gli analoghi intendimenti rivelati da R. Lullo nel suo scritto sulla quadratura e triangolatura del cerchio. Il Lullo nel suo *De quadratura et triangulatura circuli* tentò di approdare all'impossibile soluzione della quadratura e triangolatura del cerchio, esibendo un unico quadrato (e un unico triangolo) ricavabile con analoghi procedimenti da «tutti» i successivi poligoni inscrittibili in una circonferenza; un quadrato di area presumibilmente identica all'«ultimo» dei poligoni inscritti, cioè al cerchio. Ciò che ne risultò fu un'impareggiabile descrizione dell'esplicazione geometrica del principio della creazione e della partecipazione delle forme create alla loro ultima sorgente.

Il cerchio vuoto, non ancora deformato dalle ripartizioni

interne relativamente asimmetriche disegnate da un qualsiasi poligono regolare inscritto (ad esempio un triangolo equilatero inscritto divide il cerchio in quattro parti non tutte uguali tra loro), sta a significare, spiega il Lullo, l'unica generale verità, diffusa e conosciuta in una molteplicità di verità dalla rifrazione dell'anima, l'unica e generale misura divisibile nella molteplicità delle misure parziali. Man mano che il cerchio è riempito dalle figure poligonali inscritte, la molteplicità si diffonde nel vuoto iniziale imponendo misure e ripartizioni definite da particolari proporzioni numeriche: il mondo delle forme si articola conformemente all'esplicazione dei suoi modelli geometrici. Ma per ogni poligono, tenendo conto delle proporzioni numeriche ad esso associate, si può definire e costruire una linea «naturale», la cui lunghezza rimane invariata, e che, quadriripartita, genera il lato di un quadrato che risulterà identico per «tutti» i poligoni regolari inscritti, al crescere indefinito del numero dei loro lati. Questo è il quadrato, conclude il Lullo, che realizza la quadratura del circolo.

La linea «naturale» così estraibile da tutti i poligoni è l'elemento che restituisce alla misura «parziale» di ciascuno di essi la misura primigenia, assoluta, da cui questa proviene, e senza di cui non sarebbe nulla; come nulla sarebbero le proporzioni numeriche senza l'unità.

Le stesse costruzioni sono ripetibili per il triangolo anziché per il quadrato, sicché queste due figure, il quadrato e il triangolo, costituiscono i generi principali, gli archetipi e gli essenziali punti di riferimento per ogni altra figura. È solo con la loro mediazione che ogni figura poligonale è riconducibile alla misura del cerchio che la contiene. Scrive il Lullo che tutte le misure particolari definite dai poligoni inscritti si riducono a tre generi di numeri, ovvero al numero tre, al numero quattro e al numero circolare.

«Esiste un cerchio visibile all'intelletto» avrebbe scritto il Cusano «che è uguale in tutti i poligoni, uguale anche a un altro poligono che ha un perimetro diverso».²⁴ La tecnica di quadratura e triangolatura del cerchio di R. Lullo non fu che il tentativo di esibizione sensibile di questo cerchio, nonché l'illustrazione dell'infinita uguaglianza dell'essenza divina, di cui avrebbe ancora parlato il Cusano, e della sua rifrazione nel mondo delle forme attraverso la primigenia contrazione nell'ente triangolare e quadrangolare.

1. *Cahiers*, II, Paris, 1972, p. 156.

2. L.E.I. Brouwer, *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism*, in «South African J. of Science», 49, 1952, pp. 139-143; trad. it. in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, Bari, 1967, pp. 223-231.

3. Cfr. G. Bruno, «*Praelectiones geometricae*» e «*Ars deformationum*», a cura di

G. Aquilecchia, Roma, 1964, Introd. p. xx.

4. *Ibidem*, p. XIX.

5. *Ibidem*, p. XXI.

6. G. Bruno, *De la causa principio et uno*, a cura di G. Aquilecchia, Torino, 1973, p. 63.

7. G. Bruno, *De gli eroici furori*, in *Dialoghi italiani*, a cura di G. Gentile e G. Aquilecchia, Firenze, 1957, p. 997.

8. B. Spaventa, *Rinascimento, Riforma, Controriforma*, Venezia, 1928, pp. 229-238.

9. *Ibidem*, p. 188.

10. G. Bruno, *De l'infinito, universo e mondi*, in *Dialoghi italiani*, cit., p. 381.

11. *Ibidem*, p. 382.

12. *La dotta ignoranza*, II, I, trad. it. cit., p. 111.

13. *Dialoghi dell'idiota*, II; trad. it. cit., p. 459.

14. *Il Principio*, 33, trad. it. cit., p. 738.

15. L'espressione è dello Jaeger. Cfr. R. Mondolfo, *op. cit.*, p. 155.

16. *De l'infinito, universo e mondi*, cit., p. 377.

17. *Il complemento teologico*, IV, trad. it. cit., p. 617.

18. *De mathematica perfectione*, in *Opera*, Basel, 1565, p. 1110.

19. *Ibidem*, p. 1121.

20. Cfr. *Due dialoghi sconosciuti e due dialoghi noti*, a cura di G. Aquilecchia, Roma, 1967, pp. 14-15.

21. Cfr. «*Praelectiones geometricae*» e «*Ars deformationum*», cit., p. 83.

22. *Ibidem*, p. 31.

23. *Ibidem*, p. 59.

24. *Il complemento teologico*, IV, trad. it. cit., p. 617.

VII

L'EGUAGLIANZA

Nelle sue *Finzioni* Borges immaginò che uno scrittore francese contemporaneo tentasse di portare a compimento un singolare proposito: quello di scrivere, senza rinunciare a un'ispirazione spontanea, alcune pagine che riproducessero parola per parola due interi capitoli del *Don Chisciotte* di Cervantes. La difficile impresa poteva in verità essere dichiarata semplicemente assurda, perché il suo svolgimento era legato a due leggi antitetiche: una costituita appunto dalla libera ispirazione; l'altra dall'impegno a sopprimere ogni variante del modello originale.

Nel riferire questo tentativo non sarebbe in realtà corretto parlare di un modello originale al cui confronto lo scritto moderno si riduca a semplice imitazione. Di imitazione non si tratta, e neanche, ovviamente, di semplice copiatura. L'intenzione di non compromettere la libera fantasia creatrice del suo autore metterebbe al riparo il testo contemporaneo da ogni perdita di originalità: il suo valore sarebbe degnamente confrontabile con l'opera formalmente identica che l'ha preceduto.

È possibile tutto questo? L'autore francese risponde testualmente: «La mia impresa non è difficile. Mi basterebbe essere immortale per condurla a termine». La duplicazione perfetta di un originale richiede dunque l'immortalità.

Ecco dunque un paradosso che svela un altro nome dell'infinito: l'eguaglianza. La vera eguaglianza è un punto limite irraggiungibile che l'autore contemporaneo intende afferrare senza trascorrere per l'inesauribile via delle approssimazioni successive. «L'oggetto finale d'una dimostrazione teologica o metafisica» egli sostiene «non è meno dato e comune del divulgato romanzo che mi propongo. La sola differenza è questa: che i filosofi pubblicano in gradevoli volumi le tappe intermedie del loro lavoro, e io ho risoluto di cancellarle».¹

In realtà questo tentativo dello scrittore contemporaneo appare manifestamente e ovviamente impossibile. Ma una spiegazione plausibile di tale ovvietà richiede considerazioni non del tutto ovvie, non estranee ai più complicati sofismi generati dall'idea di infinità.

Niccolò Cusano aveva in verità già affrontato lo stesso problema scrivendo nel terzo libro de *La dotta ignoranza* intorno

alla questione della gerarchia degli universali. Ivi si osserva che le innumerevoli creature finite dell'universo si dispongono in una successione indefinita che non trova un termine conclusivo né nel basso né nell'alto: il processo ascendente o discendente dei contratti non può giungere al massimo assoluto e neppure al minimo assoluto, perché la infinita potenza di Dio non può essere esaurita dalle cose della creazione. Questa inesauribilità è trasmessa da Dio agli universali e diviene una caratteristica insopprimibile di ogni genere e specie. Come l'universo non raggiunge il massimo assoluto così i generi non raggiungono gli ultimi confini dell'universo, le specie non colmano l'universalità del genere, e gli individui non esauriscono l'indefinita potenza esemplificatrice della specie. Si può dunque, pur con qualche cautela, tentare una prima conclusione: l'universo, il genere e la specie sono, entro i limiti sanciti dalla loro stessa definizione, degli infiniti attuali; ciascuno di essi, in virtù del proprio carattere di unità sintetizzante, contiene e limita un'infinità potenziale di oggetti.

Descrivendo il reciproco disporsi delle specie nell'ordine dell'universo il Cusano ricorre continuamente all'idea di numero: «Le specie» egli scrive «sono simili al numero, che procede ordinatamente ed è necessariamente finito. *Per esse, l'ordine, l'armonia, la proporzione sono nella diversità...*». Ma in che cosa consiste esattamente questa diversità? Dalle spiegazioni che seguono si deduce che l'obbligo della diversità tra le cose del creato (mai nulla è in tutto uguale a qualcosa d'altro) è l'ordinaria verifica di una legge collegabile al problema della continuità. Ecco come si esprime il Cusano: «Le specie siano, pertanto, simili ai numeri che ci vengono incontro procedendo dal minimo che è il massimo, e dal massimo cui non si oppone il minimo: così che non ci sia nessuna cosa nell'universo che non goda di una singolarità che non è dato ritrovare in altra, cioè che nessuna sia superiore in tutto a tutte le cose o sia superiore in modo eguale a quelle diverse, per cui non possa mai essere uguale in nulla a nessuna. *Se essa fosse stata più piccola in un tempo e in un altro più grande, compirebbe questo cambiamento in una singolarità per cui non raggiunga mai l'uguaglianza precisa. Così, il quadrato iscritto nel cerchio arriva alla grandezza di quello circoscritto, dal quadrato che è minore del circolo al quadrato più grande del circolo, senza per questo giungere mai ad essere uguale a quello*».²

Risulta indubbiamente verificata la circostanza che non si dia mai l'eguaglianza precisa tra due cose distinte. Tuttavia la verità annunciata dal Cusano nelle due ultime proposizioni citate è tutt'altro che indiscutibile: se la qualità di un oggetto muta da una gradazione a un'altra non è immediato presumere che essa non possa assumere tutti i valori intermedi, e che ce ne sia qualcuno (in realtà infiniti) «singolare», cioè impossibile,

incompatibile con un'esistenza concreta.

Nel XIX secolo Richard Dedekind formulò un principio di continuità che prevedesse un'«esistenza» formalmente definibile di tali singolarità, ed estese la nozione di numero, dal campo razionale al campo reale, mediante l'idea di «sezione». Ma questo fu pur fatto a spese di interminabili esigenze di chiarificazione sulla reale natura degli enti così definiti, e non si poté mai cessare di ritenere i numeri irrazionali legati in qualche modo all'indefinito.

L'impossibilità di una perfetta duplicazione fu in Cusano implicitamente associata a un'idea del numero inteso al modo di Eudosso od Euclide. Nella geometria euclidea non è possibile costruire sulla base di una qualsiasi unità di misura un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$, come non è possibile costruire un segmento di lunghezza π . Eppure, assumendo un modello di spazio in cui valga la legge di continuità, si sarebbe indotti intuitivamente ad ammettere l'esistenza di un simile segmento. Se da un cubo di lato 1 si passasse con continuità a un cubo di lato 2, il volume crescerebbe con continuità da 1 a 8, e assumerebbe allora un valore intermedio uguale a 2, cui corrisponderebbe un lato di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.

La quarta e quinta definizione del V libro degli *Elementi*, che stabiliscono la condizione e il criterio di confrontabilità tra rapporti di grandezze, non escludono in linea di principio il caso delle grandezze incommensurabili. Ma questo caso non è esplicitamente illustrato, e il senso di quelle definizioni non è tale da consentire un'estensione del significato del numero analoga a quella operata da Dedekind. Nella geometria euclidea $\sqrt[3]{2}$ non fu un numero reale e lo spazio si articolò sempre in proporzioni finite.

Per il Cusano lo spazio degli individui, delle specie e dei generi ha la medesima struttura: tali entità sono confrontabili in proporzioni rigorosamente finite che escludono la singolarità dell'eguaglianza. «I princìpi individuanti» egli scrive «in nessun individuo possono incontrarsi tra di loro con lo stesso accordo e proporzione che hanno in un altro individuo, per cui ognuno è per sé uno e perfetto nel modo in cui può. Senza dubbio in una specie, per esempio quella umana, sono esistiti una volta alcuni uomini che sono stati stimati più perfetti e più nobili di altri per certe qualità: Salomone superò tutti gli altri in supremazia, Assalonne in bellezza, Sansone in forza, e quelli che sono vissuti più di altri nella vita intellettuale hanno più degli altri meritato di essere onorati. Tuttavia, la diversità delle opinioni dovuta alla diversità delle religioni, delle sette e dei paesi, rende diversi i giudizi di paragone. Per questo ciò che è lodevole secondo un'opinione è biasimevole secondo un'altra».³

In termini geometrici l'eguaglianza assoluta del cerchio a tutte le figure poligonali attraverso la mediazione del quadrato non è

realizzabile, per il Cusano, nell'ambito dell'ordinaria apparenza sensibile. La quadratura del cerchio che definirebbe la perfetta e infinita Eguaglianza non è concepibile se non come evento ideale, come invisibile centro di oscillazione del perpetuo avvicinarsi del «più e meno», del «grande e piccolo» (il μέγα καὶ μικρόν di Platone). Quando si entra nel mondo delle forme l'Eguaglianza si tramuta fatalmente nella dualità, ed è tutt'al più un orientamento riconosciuto e definibile di quest'ultima a ricondurre all'unità primigenia.

Nei procedimenti geometrici esposti nella *Quadratura circuli* sono tuttavia visibili figure geometriche ove appare ad esempio riprodotta la rettificabilità del cerchio e, inversamente, la circonferenza di perimetro pari alla lunghezza di un segmento assegnato. Questi casi di 'uguaglianza' sono tutti ricondotti ad un sottinteso principio di continuità: il secondo si traduce nell'evidente 'esistenza' di un punto di intersezione tra due segmenti; il primo è illustrabile nell'assenza di 'vuoti', cioè nella 'completezza' che l'idea intuitiva di continuità assegna come irrinunciabile caratteristica di un qualsiasi segmento di retta. In entrambi gli esempi il caso singolare dell'eguaglianza è riflesso in qualcosa di concettualmente assimilabile alla «sezione» di Dedekind. Esso si pone come invisibile punto di mediazione tra duellanti di configurazioni geometriche opposte: quella per cui l'eguaglianza non è raggiunta, per così dire, per difetto, e quella per cui l'eguaglianza non è verificata per eccesso. Il «grande e piccolo» (μέγα καὶ μικρόν) trova il centro di equilibrio in un punto geometrico la cui esistenza, pur intuita, non è rigorosamente provata: la quadratura e triangolazione del cerchio sono presupposti ancor prima della loro illustrazione geometrica e la loro perfettibilità non è sicuramente l'ultimo passo di una dimostrazione ineccepibile. La quadratura del cerchio ha la stessa evidenza di un punto intuitivamente visibile sul piano, ma anche la sua stessa problematicità. («Qui negat inter minus et maius cadere medium equale» scrive Cusano «negat dari posse trigonum isoperimetrum circulo. Ego autem praesuppono quadraturam circuli possibilem, et per consequens omnia sine quibus non est possibilis»).

È chiaro che chiunque tolga a questi casi singolari di eguaglianza il carattere, per così dire, trascendente, cioè semplicemente incompatibile con le configurazioni associate ai casi intermedi in cui si articola il confronto immanente del «grande e piccolo», si trova di fronte a un gioco paradossale, un'antinomia o un nonsenso; da qui può scaturire la dualità come mostruosa contraffazione dell'Eguaglianza.

In effetti, se si ripensa al proposito dello scrittore francese di Borges non si può fare a meno di scorgervi l'ambiguità del miraggio inafferrabile generato dal gioco perverso della duplicità, della ripetizione priva di senso. Sembra allora di

intendere che l'infrazione dell'impossibilità dell'infinito in atto (solo un infinito in atto renderebbe possibile l'assoluta eguaglianza) generi una sorta di mostruosa caricatura del modello che si vorrebbe realizzato. La lucidità dell'intenzione è perversa, anche perché si svolge tutta nell'ambito di una meticolosa analiticità: il compimento dell'opera non può che essere, nell'intenzione dello scrittore, l'ultimo atto di una concreta attività che non esce mai fuori di se stessa. La totalità formale dell'opera, che potrebbe costituire un risultato per così dire trascendente, non è neppure concepita: i capitoli scelti sono il IX e il XXXVIII della prima parte, con l'aggiunta di un frammento del capitolo XXII.

Esistono altri esempi di duplicazioni caricaturali, di contraffazioni della perfetta Eguaglianza? Basti pensare che l'esito finale di ogni antinomia è, in fondo, la duplicità, la corrispondenza speculare di due tesi contrapposte, entrambe dimostrabili ed entrambe confutabili. Le antinomie kantiane della dialettica trascendentale sono fra tutte le più celebri; ma un elenco completo sarebbe interminabile e forse inutile, perché molte antinomie imitano, in realtà, un comune modello. Si potrebbe ad esempio tracciare l'unico paradigma dei vari paradossi logici e semantici che tormentarono la matematica dopo Cantor e la prima esposizione 'ingenua' della teoria degli insiemi. Nel 51° capitolo del secondo *Don Chisciotte* uno di questi paradossi, analogo a quello celeberrimo del «mentitore», figura come uno dei principali enigmi proposti al governatorato di Sancio Panza. L'uomo che enuncia il paradosso dice contemporaneamente il vero e il falso, ed essendo la pena per lo spergiuro la condanna a morte, la saggezza di Sancio decreta la spartizione del falso «mentitore» in due parti: la prima da lasciare libera, la seconda da impiccare. Divisione ovviamente impossibile, che sarà al fine sostituita da un atto di clemenza; richiamo emblematico, in ogni caso, del ritmo binario della narrazione, dell'incessante reciproco richiamo di coppie di avvenimenti analoghi e contrapposti, della stessa duplicazione provocata dal ribaltamento di prospettiva dal primo al secondo *Don Chisciotte*.

La scelta dello scrittore di Borges non poteva perciò essere più felice. Ma c'è un ultimo aspetto della questione che vale la pena esaminare brevemente: Borges accenna al fatto che il felice esito dell'impresa è confortato da un giudizio di contingenza sull'opera di Cervantes. Cervantes ha sì scritto il *Don Chisciotte* ma avrebbe in fondo potuto non scriverlo. Se si volesse allora percorrere un immaginario elenco di antinomie alla ricerca di un'illustrazione della *contingenza*, cioè di una realtà privata della sua caratteristica di necessità e unicità irripetibile, si troverebbe un eccellente modello di confronto nell'enunciazione delle aporie sul libero arbitrio in una memoria di A. Schopenhauer sulla

libertà del volere (*Über die Freiheit des menschlichen Willens*) premiata alla Società norvegese delle Scienze nel 1839. La ricerca di uno stato di autentica libertà da cui possano scaturire le nostre volizioni, spiega Schopenhauer, provocherebbe un regresso all'infinito senza soluzione. L'uomo può fare ciò che vuole, ma la domanda «l'uomo può volere ciò che vuole?» provoca, se la risposta è affermativa, un'ulteriore questione del tipo «l'uomo può anche volere ciò che vuol volere?» e via di seguito. Un'indagine sulla libertà del volere richiede che la volontà diventi oggetto di se stessa, e ciò innesca il meccanismo senza rimedio di un percorso inesauribile di un'infinità potenziale. Se si riuscisse per assurdo a raggiungere un termine finale di questo percorso, esso indicherebbe il vero stato di libertà come indifferenza assoluta, come assenza di una qualsiasi ragion sufficiente determinante; e questo stato di libertà (il «*liberum arbitrium indifferentiae*») coinciderebbe stranamente con una totale contingenza. Tra due opposti richiami alla scelta e all'azione l'uomo libero non saprebbe infatti che fare, perché privo di una inclinazione univoca e di un motivo interiore, e ciò che non riesce a porsi in rapporto a una causa o a una ragione sufficiente che gli comunichi il segno e la caratteristica della necessità è per definizione, appunto, contingente. L'uomo realmente libero si troverebbe condannato ad una duplicità irresolvibile, nel senso esatto e preciso del termine, come ad esempio seppe esemplificare Dante (*Par. IV*, 1-3):

Intra due cibi, distanti e moventi
d'un modo, prima si morrìa di fame,
che liber'uomo l'un recasse ai denti.

Ma da dove proviene l'illusione della libertà, l'errore che ci fa credere che siamo uomini liberi? Schopenhauer indica la sorgente dell'equivoco in quella che egli considera la prima fase dell'atto di volizione, quello stadio cioè in cui la volontà è come in divenire e non si è ancora tramutata in *risoluzione*. Questo stadio è il *desiderio*. Quando l'uomo desidera semplicemente e non ha ancora deciso verso quale oggetto orientare l'azione, ritiene che volizioni opposte potrebbero simultaneamente convivere nella coscienza, e s'illude di poter proiettare questa duplicità fin nella fase successiva e finale dell'atto di volizione. In realtà si possono *desiderare* cose opposte contemporaneamente, ma è possibile *volverne* una sola; e qui si innesta quel carattere di necessità che rende vana la ricerca del «*liberum arbitrium indifferentiae*» come stato concretamente realizzabile nel mondo fenomenico. Non è casuale che quella tipica sorgente di falsa infinità che Leopardi o Hegel indicarono nel desiderio sia anche legata, in qualche modo, alle antinomie della libertà. Quando si desiderano due oggetti simultaneamente già si configura uno stato psicologico in

cui la dualità esiste come fatto potenzialmente paralizzante. Questa stessa dualità, protratta oltre i confini del desiderio che l'ha generata, fino a invadere la sfera della decisione e della risoluzione finale, provocherebbe un reale stato di irrisolvibile indecisione dell'uomo assurdamente libero di fronte a due scelte antitetiche. Nel romanzo *Il piacere* di D'Annunzio è stato descritto il paradossale stato d'animo dell'uomo che indulga nel prolungamento della dualità prospettata dal desiderio oltre i limiti consentiti. Il libro andrebbe letto se non altro per la descrizione degli innumerevoli sofismi ispirati dal desiderio e per l'effetto devastante che questi sembrano provocare. La libertà dunque non esiste? Non è certo questa la tesi di Schopenhauer. Ciò che egli dimostra è solo che la libertà non è riscontrabile nell'ordinario mondo fenomenico. In questo senso la libertà va semplicemente spostata: essa è 'trascendentale' ed è essenzialmente un mistero. La coscienza della nostra autonomia originaria accompagna tutte le nostre azioni, riconosce Schopenhauer: «ma il suo vero contenuto oltrepassa l'ambito delle azioni e va molto più in là, poiché abbraccia in realtà il nostro essere e la nostra stessa essenza, da cui (sotto l'impulso dei motivi) tutte le azioni scaturiscono necessariamente».

Wittgenstein (*Tractatus*, 5.632) avrebbe visto nell'autonomia della volontà del soggetto le caratteristiche di un *limite*: «Il soggetto non appartiene al mondo» avrebbe scritto «ma è un limite del mondo».⁵ Si tratta evidentemente proprio del limite di quel regresso all'infinito prospettato da Schopenhauer. Anche Simone Weil avrebbe ripetuto: «La liberté est une limite».⁶

Quel punto limite ove necessità e libertà finiscono per coincidere nell'essenza stessa del soggetto è anche un punto di raccordo, di relazione armonica tra i poli del dilemma: in termini di libertà-necessità esso riproduce la funzione di ciò che Gioberti chiamava «metessi», cioè partecipazione, relazione, essendo proprio i termini mediani (τὰ μεταξύ) a «creare» le condizioni imprescindibili della stessa esistenza. Gioberti aveva insistito sull'idea che fosse specialmente l'atto della creazione a testimoniare il raccordo per eccellenza, il prototipo dell'armonia. E in quel movimento infinitesimale che fa scaturire la molteplicità dall'unità e la linearità dal punto, si può cogliere anche il primo esemplare dell'atto che concilierebbe la necessità con la libertà. H. Poincaré e F. Gonseth videro muoversi un riflesso di quest'esemplare in tutte quelle circostanze della vita spirituale in cui si rivela un'attività autenticamente creativa. In *La science et l'hypothèse* Poincaré suggerì che la stessa invenzione matematica è in grado di mostrare questa possibilità e di tradurla in fatto incontrovertibile. Quando il matematico formula i postulati di una teoria e propone un sistema assiomatico viene a collocarsi esattamente in quel punto in cui la *libertà* dell'invenzione (gli assiomi non sono né giudizi sintetici a

priori né fatti sperimentali) si concilia con il carattere di rigorosa necessità della catena di successive deduzioni. Ma che cosa significa questa circostanza, annota Gonsseth, se non che lo spirito è *liberamente* riuscito a farsi *determinare* dalle cose? «L'evidenza» egli scrive «è il punto in cui lo spirito lega la sua libertà al determinismo delle cose». ⁷ L'evidenza di una dimostrazione e del raccordo, in ogni suo passo, di premessa e conclusione, di libera posizione dell'ipotesi e necessità rigorosa di deduzione della tesi, appare allora come il segno di un possibile raccordo tra il fenomenico e il soggettivo, tra il determinismo del mondo e l'autonomia dello spirito come prerogativa del regno morale.

Il problema del «*liberum arbitrium indifferentiae*» fu ancora sfiorato da Saul Kripke nel suo saggio *Identity and Necessity* (in *Identity and Individuation*, New York, 1971). La sua domanda è: può lo stesso uomo essere contemplato in *diversi* mondi possibili, cioè in diverse condizioni controfattuali? È permesso porsi il quesito se una certa persona avrebbe potuto comportarsi diversamente da come si è comportata, pur rimanendo se stessa? Kripke risponde affermativamente distinguendo tra *designatori rigidi* e *designatori non-rigidi*: i primi denotano un oggetto che rimanga identico a sé in tutti i mondi possibili (ad esempio la radice quadrata di 25); i secondi alludono ad un oggetto che possa variare in corrispondenza a diverse circostanze possibili («l'oratore romano che smascherò Catilina» designa Cicerone nel mondo attuale, ma in una situazione controfattuale potrebbe designare un diverso personaggio). L'inclinazione di Kripke è di vedere nei nomi propri come Cicerone, Nixon, Franklin, dei designatori rigidi e nelle eventuali circostanze definitorie (come «il trentasettesimo presidente degli Stati Uniti» per Nixon) delle verità a posteriori suscettibili di designare l'oggetto in modo «non rigido», limitatamente cioè al mondo attuale. Nixon, afferma Kripke, avrebbe potuto non fare tutto ciò che ha fatto meno una cosa: non essere Nixon. Il quesito «Nixon avrebbe potuto essere un uomo diverso da quello che effettivamente è» è ambiguo perché suggerisce un senso letterale accanto a quello metaforico apparentemente consentito: «Nixon avrebbe potuto essere un *tipo* diverso di persona». Quest'ultima sembra una domanda plausibile; il senso letterale è autocontraddittorio. Ma il problema è proprio questo: fino a che punto il senso metaforico protegge da un'intrusione di quello letterale?

Il semplice cenno al libero arbitrio fa pensare che Kripke non intenda in realtà fornire una risposta; o che perlomeno gli preme in via prioritaria offrire una prova della compatibilità logica di un linguaggio in cui intervengono espressioni modali riferite a individui che rimangano invariati per diversi mondi possibili. Questa ipotesi è implicita nella sua elaborazione di sistemi formali estesi alla modalità e alla quantificazione, ove sono

formulabili teoremi di completezza (ad esempio *A Completeness Theorem in Modal Logic*, «J. Symbolic Logic», 24, 1959, pp. 1-14). Rimane tuttavia un dato inconfutabile. Kripke difende, a sostegno dei suoi modelli, l'essenzialismo aristotelico, anche se conciliandolo in modo singolare con l'empiria, e facendolo derivare, in taluni casi, da verità a posteriori. (Se riconosco, per un giudizio empirico, che *questo* leggio è di legno, egli sostiene, l'essere di legno è una proprietà *essenziale* di *questo* leggio, ed esso non avrebbe potuto essere, ad esempio, di ghiaccio senza tramutarsi, per questo, in un altro leggio).

Essenzialista, nel fondo, è anche la posizione di Schopenhauer. Nel suo saggio sulla libertà del volere egli finisce per collocare nella qualità più interna del soggetto il principio di libertà, e per farne così un aspetto della *essentia*. Non lontano da Kant, egli vide una conciliazione tra necessità e libertà nell'incontro tra l'azione forzosamente empirica e il carattere trascendentale del soggetto. Ma questa «coincidentia oppositorum» porterebbe, se realizzata, a condizioni inimmaginabili. L'uomo è intrinsecamente libero, perché in definitiva «la porta non è mai stata chiusa» come enunciò testualmente un maestro sufi, oppure come si legge nell'*Apocalisse* (III, 8), o infine come suggerì Kafka nella parte finale di *Il processo*. Ma si tratta in definitiva di una «verità senza forma», di un vuoto pericoloso che rischierebbe di tramutare ogni tentativo di trasporlo in circostanze tangibili in un falso miracolo etico, un puro non senso. Nietzsche non mancò di infierire su quel residuo di riconoscibilità empirica che Schopenhauer aveva salvato al libero arbitrio. In *Umano, troppo umano*, I, 39 egli accusò Schopenhauer di indulgere in false deduzioni sull'esistenza di una libertà intellegibile legata all'*esse* in base alla constatazione che le nostre azioni risultano in definitiva a noi imputabili e che non si può sfuggire al senso di responsabilità. È vero che da certe azioni proviene un «disagio» o «senso di colpa», ma è assurdo, sostiene Nietzsche, indurre dal *fatto* del disagio «la fondatezza, la ragionevole *ammissibilità* di questo disagio», e interpretarlo così come un sicuro segnale dell'*essentia*. «Perché l'uomo si *ritiene* libero, ma non perché è libero» egli conclude «prova pentimento e rimorsi».

Ma l'essenza, volle insistere S. Kripke, è substrato ineliminabile del discorso; per quanto la si chiami finzione e si riduca fin dove è possibile, secondo l'ispirazione di W.V. Quine, le implicazioni ontologiche del linguaggio, sarebbe difficile disconoscerne la funzione unificatrice e conciliatrice delle parti che compongono un'unità discorsiva. Quando si introducono la necessità e la possibilità e si entra nella logica modale sarebbe difficilmente sostenibile, per Kripke, la tesi che il semplice prospettare situazioni controfattuali o diversi mondi possibili debba minare l'integrità dell'essenza. Dicendo che Cicerone avrebbe potuto fare altre cose da quelle che ha fatto in diverse

circostanze intendiamo parlare di un individuo unico e inscindibile, proprio di *lui*, cioè di Cicerone, invocando in definitiva il principio di identità $A = A$. Il dilemma è configurabile come confronto del limite con l'illimitato. L'esplosione illimitata delle possibilità prospettabili, l'immaginazione incontrollata di condizioni controfattuali, quel rischioso «senso della possibilità» di cui scrive Musil in uno dei capitoli iniziali di *Der Mann ohne Eigenschaften* ha come necessario contrappeso l'unità di riferimento di un soggetto centrale immutabile, che non svolge altro ruolo che quello di *limitare* in qualche modo quest'infinità potenziale. Qui è ancora una questione di scelta: o si accoglie questo limite che è anche una sorta di infinità attuale invisibile perché è l'analogo di un substrato di tutti gli accidenti, oppure lo si rigetta come finzione, censurandolo per questa sua qualità *negativa* di oggetto non rappresentabile. S. Kripke seguì la prima strada, W.V. Quine la seconda. Ma è altresì chiaro che la censura non dovrebbe sottrarre alcunché di ciò che può fare di una finzione il perno e l'origine di ogni fattualità.

Quine fu sostanzialmente scettico anche sull'uso dell'eguaglianza e sulla compatibilità di una logica modale quantificata, perché trovò che questa implicava un'accettazione dell'essenzialismo aristotelico. Egli spiegò come i contesti modali «È necessario che...» o «È possibile che...» conducono ad ambiguità e contraddizioni se mescolati a un'applicazione della sostitutività dell'uguaglianza; li chiamò per questo contesti *referenzialmente opachi*. Se ad esempio diciamo che «9 è *necessariamente* maggiore di 3» siamo nel vero. Ma se poi scopriamo che «il numero dei pianeti del sistema solare è 9» e ripetiamo «il numero dei pianeti è *necessariamente* maggiore di 7» cadiamo in errore, perché trasformiamo una verità a posteriori, quale indubitabilmente è una scoperta scientifica, in una verità necessaria e apodittica. Quine non pensò neppure che la necessità potesse accordarsi con l'a posteriori e con la verità empirica che egli non mancava di associare alla contingenza. I suoi esempi di *opacità referenziale* utilizzano per lo più l'espedito di sostituire in un contesto modale (o in un contesto in cui compaiono espressioni del tipo «egli crede che...», «egli sa che...») i termini di un'eguaglianza fondata su un'osservazione empirica, e una tecnica analoga ha l'effetto di rendere inservibile il rimedio suggerito dai cosiddetti «concetti individuali» di Carnap e Church.⁸ In tal modo l'opacità referenziale è in parte un riconoscimento della complessità descrittiva di alcuni nomi di oggetti e di una fatale inclusione, in alcuni di essi, di circostanze empiriche che corromperebbero la nudità dell'essenza che il nome vorrebbe indicare. Usando il «numero dei pianeti» per designare il numero 9 si mescolerebbero contenuti a posteriori, derivanti dall'osservazione astronomica, con certe qualità che dobbiamo pur riconoscere nel 9 per potere attribuire carattere di

necessità a proposizioni aritmetiche del tipo «9 è maggiore di 7».

Ma gli argomenti di Quine perdono una parte della loro efficacia se si accetta l'uso spregiudicato dell'essenzialismo suggerito da Kripke. La proprietà di un oggetto, egli osservò, può considerarsi *essenziale* anche se è stata un'osservazione empirica a svelarla. Essenzialismo e necessità non sono in disaccordo con l'a posteriori; e quest'ultimo non è un sinonimo di contingenza. Sicché è plausibile la tesi che alcune asserzioni di identità, per quanto riconosciute empiricamente, siano necessarie purché vere. Un simile allargamento dell'area che compete all'*essentia* può così tramutarsi in un rimedio all'opacità referenziale dei contesti modali e alle ambiguità dell'eguaglianza, un sostegno alla riproducibilità logica di parti sempre più ampie dei linguaggi ordinari.

1. *Finzioni*, Torino, 1971, p. 39.

2. *La dotta ignoranza*, III, I; trad. it. cit., p. 161. Il corsivo è mio.

3. *Ibidem*, p. 163.

4. *De quadratura circuli*, in *Opera*, Basel, 1565, p. 1097.

5. Cfr. anche *Lezioni e conversazioni*, Milano, 1976, pp. 35-36.

6. *Cahiers*, I, Paris, 1970, p. 35.

7. *Determinisme et libre arbitre*, Neuchâtel, 1947, p. 186.

8. Cfr. *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass., 1961, cap. 8; trad. it. *Il problema del significato*, Roma, 1966, pp. 129-148.

VIII

CARTESIO

In risposta ad alcune delle obiezioni mossegli dal teologo Caterus alle idee esposte nelle sue *Meditazioni* Cartesio precisava, tra le altre cose, ciò che egli intendeva usando la parola «infinito».

La distinzione che egli fa a questo proposito tra infinito e indefinito riflette la tradizionale opposizione tra infinità attuale e infinità potenziale; tuttavia i termini del problema appaiono leggermente spostati. L'«indefinito» rammenta pur sempre la fatale imperfezione dell'oggetto terrestre che appare in sé privo di limite; ma indefinita è ora tipicamente quella cosa che, pur essendo senza limiti sotto qualche aspetto, non è tuttavia sciolta da ogni limitazione, poiché, se non altro, non può sottrarsi ai confini segnati dalla sua stessa esistenza particolare, dal suo essere ciò che è e non un'altra cosa.

«Pongo qui la distinzione» egli scrive «tra l'indefinito e l'infinito. E non c'è nulla che io chiamo propriamente infinito se non ciò in cui da ogni parte non riscontro alcun limite, nel qual senso solo Dio è infinito. Ma le cose di cui non vedo una fine solo sotto qualche rispetto, come l'estensione degli spazi immaginari, l'insieme dei numeri, la divisibilità delle parti della quantità e altre simili, io le chiamo indefinite e non infinite, perché esse non sono da ogni parte senza fine né limite».¹

Da altre più esplicite affermazioni è facile capire che questa semplice distinzione tra infinito e indefinito non è priva di un discreto contenuto di novità.

Il fatto è che nella prospettiva cartesiana l'imperfezione significata dall'uso del termine «indefinito» consiste assai più nella presenza residua del limite che nella apertura incessante al suo superamento. Proprio questa apertura incessante era stata da Boezio rigettata come mostro di malizia e da Aristotele accostata al non-essere e alla privazione. Nella terza delle *Meditazioni* Cartesio vi scorge invece il segno inequivocabile dell'impronta divina. «Certamente» egli scrive «non si deve ritenere cosa strana che Dio, creandomi, abbia messo in me questa idea per essere come il marchio dell'artefice stampato sulla sua opera; e non è così necessario che questo marchio sia qualcosa di diverso da questa stessa opera. Ma dal solo fatto che

Dio mi ha creato, è fortemente credibile che egli mi ha in qualche modo prodotto a sua immagine e somiglianza, e che io concepisco questa rassomiglianza (nella quale l'idea di Dio si trova contenuta) con la stessa facoltà per cui concepisco me stesso; nel senso che, quando rifletto su di me, non solamente riconosco che sono una cosa imperfetta, incompleta, e dipendente da altri, che tende e aspira senza posa a qualcosa di migliore e più grande che io non sono, ma conosco anche, nello stesso tempo, che colui da cui dipendo possiede in sé tutte le cose grandi a cui aspiro, e di cui io trovo in me le idee, non indefinitamente e solo in potenza ma in modo tale che egli ne gode effettivamente, attualmente e infinitamente, come può essere per Dio stesso».²

L'atteggiamento psichico di apertura all'illimitato che si manifesta nel *desiderio*, fonte di alcune tra le più note difficoltà del falso infinito, è visto in questa prospettiva come riflesso di Dio nell'imperfezione dell'uomo. «... Come sarebbe possibile» si legge ancora nella terza delle *Meditazioni* «che io possa riconoscere che dubito e desidero, cioè che mi manca qualche cosa e che non sono tutto perfetto, se io non avessi in me alcuna idea di un essere più perfetto del mio, per la cui comprensione io conosco i difetti della mia natura?».³

Esiste dunque nell'uomo un'idea positiva dell'infinito rispetto alla quale il limite appare un difetto e il desiderio e il dubbio un sintomo di una volontà di affrancamento. Il male e l'antinomia non sono in tal caso di per sé il simbolo rovesciato della perfezione di Dio, né il limite appare come condizione di una rivelazione dell'εἶδος, dello sguardo divino. La forza devastante e rivelatrice dell'antinomia è soppiantata da una positiva intuizione della totalità animata e nutrita dal desiderio, potenziale correttore di una creatura perennemente in difetto. D'altro canto non c'è più traccia, appunto, di questa relativa perfezione della creatura limitata, in cui N. Cusano aveva scorto l'immagine di una «infinità finita», di una pienezza formale benedetta dall'occhio divino. Dio, in realtà, non ama più il limite.

In una lettera scritta da Cartesio a Chanut, il 6 giugno 1647, il mondo comincia ad essere descritto come una rete sterminata di rapporti funzionali priva di orientamenti assoluti. La proclamazione che Dio solo è la causa finale (*Omnia propter ipsum [Deum] facta sunt*) è usata come prova inconfutabile che nessuna creatura, e nemmeno l'uomo, può considerarsi la meta definitiva di un qualsiasi ordine finalistico. Ogni cosa è suscettibile di aumento o diminuzione, e invece di chiudersi in sé, nella sua forma o limite, si commisura immediatamente a qualcosa *d'altro*. Sarebbe poi stato Pascal a sviluppare appieno questa tendenza dello spirito, spingendosi a riferire ogni cosa, e l'uomo principalmente, all'infinita totalità degli eventi correlati. Qualsiasi oggetto diventa allora, in questa prospettiva,

inconoscibile, perché il suo apprendimento richiederebbe la percezione di tutte le cause mediate e immediate, di tutti i vincoli che lo legano ai fatti più lontani e irreperibili. Come dicevano i Pitagorici l'illimitato è inconoscibile.

La materia, separata dallo spirito, comincia ora a frantumarsi. La sua divisibilità è dichiarata, nella sesta delle *Meditazioni*, l'elemento che la caratterizza nei riguardi dello spirito, che è indivisibile: sintomo ovvio e lampante che la rottura dell'equazione tra spirito e mondo si traduce nella perdita di integrità della forma, e quindi nella prevalenza dell'illimitato sul limite. La riduzione dei corpi all'estensione è già una anticipazione promettente della disintegrazione formale operata dalle antinomie dello spazio.

La verità indubitabile che il mondo ci è dato solo come idea, come rappresentazione soggettiva, acquista con queste premesse il senso particolare di una puntuale messa in atto delle più tradizionali regole metafisiche che fanno scorgere ovunque apparenze ingannevoli. Cartesio non fu certo il primo a imbattersi in tale verità, ma questa si manifesta ora nel suo potere svuotante e demolitore, perché l'apparenza perde di fatto ciò che finora l'aveva pervasa e sostenuta. Il gioco illusorio della Natura esce dal palcoscenico non per aver procurato quella liberazione che fu detto essere la sua ultima finalità, ma per una semplice eclissi di dèi, per una separazione dello spirito da ciò che avrebbe dovuto aiutare a rivelarlo.

Non a caso, nei *Parerga und Paralipomena*, Schopenhauer classificò Cartesio come il primo filosofo che seppe formulare una chiara distinzione tra *reale* e *ideale*. Il breve sommario di storia della filosofia tracciato da Schopenhauer parte da Cartesio e arriva alla descrizione del fenomeno kantiano nell'intento di indicare l'evolversi di una prospettiva unitaria. Questa prospettiva potrebbe allora anche essere descritta in questi termini: a cominciare da Cartesio la forma si svuota del suo contenuto peculiare, cioè dell'essenza, dell'εἶδος platonico, e cessa con ciò di essere esistenza spirituale rivelata, espressione esteriore della luce divina. Florenskij osservò che l'antitesi dell'ιδέα greca intesa come sguardo divino, come raggio della «fonte di tutte le immagini», è rappresentata dalla «maschera» o «larva», guscio pseudoreale sempre associato dalla saggezza popolare al male e all'impurità. Il trapasso dall'«idea» o «sguardo divino» alla «maschera» si può tradurre allora filosoficamente nel trapasso dalla realtà fenomenica intesa in senso popolare, platonico, alla realtà fenomenica kantiana, positivista, illusoria: due diverse fasi dell'esistenza e del pensiero, non prive, ciascuna, di un proprio coerente oggetto di indagine. «Quando il volto è diventato maschera» scrive Florenskij «noi kantianamente non possiamo più conoscere il noumeno e coi positivisti non abbiamo nessuna base per affermarne l'esistenza».⁴

Kant ridusse in seguito anche le qualità primarie di ogni oggetto intuito, come l'estensione, la forma e il movimento, a universali schemi soggettivi di apprendimento. Paradossalmente questi stessi schemi che garantivano da un lato l'obiettività del conoscere erano anche la principale lente deformante con cui veniva appreso un oggetto ormai definitivamente sconosciuto. Schopenhauer avrebbe successivamente descritto il carattere illusorio dello spazio e del tempo basandosi proprio sul loro essere leggi mentali dell'intuizione sensibile, cioè modi soggettivi di organizzare l'esperienza: se lo spazio e il tempo non appartengono alla cosa in sé, ma si frappongono tra questa e noi, vuol dire che in fondo la loro essenza è illusione, perché rivestendo la realtà di determinate forme essi la celano anche irrimediabilmente ai nostri sguardi. Che questo si tramuti in qualcosa di molto simile ai paradossi di Zenone, portando in sé la temibile ambiguità di un'antinomia dirompente è così sinteticamente indicato nei *Parerga und Paralipomena*: «... in certo qual senso il passato *non* è trascorso, e tutto ciò che in qualche tempo è esistito in modo reale e vero deve in fondo esistere ancora. Il tempo viene così a somigliare a una finta cascata da teatro, che sembra precipitare, mentre non si muove dal suo posto, non essendo altro che una semplice ruota». E ancora: «... del resto già molto tempo fa io ho paragonato in modo analogo lo spazio, nella mia opera principale, a un cristallo sfaccettato, che moltiplica infinitamente ai nostri occhi quanto ci è presente in modo semplice».⁵

La ricerca di una verità conclusiva che oltrepassasse i limiti dell'ordinaria intuizione spaziale e temporale si sviluppò in seguito nell'ambito matematico. Weierstrass, Dedekind, Cantor, Russell avrebbero insistito sull'attendibilità di astratti meccanismi mentali operanti al di fuori dello spazio e del tempo. Ad esempio la differenza tra apprendimento sensoriale e vera conoscenza sarebbe stata addotta da Russell a giustificazione di una definizione matematica della continuità: una simile definizione, per essere accettabile, deve ammettere una penetrazione analitica del reale che superi la soglia finita della nostra esperienza concreta, svolgendosi così e trovando il proprio sostegno nel puro ambito della logica e nell'accordo (o almeno non disaccordo) con i fatti.⁶ La scomposizione del continuo in punti collegati da relazioni invisibili dovette finalmente realizzarsi al di fuori della nostra abituale conoscenza; e alcune delle tradizionali antinomie trovarono un'apparente soluzione al di là del nostro comune buon senso, che avrebbe esso stesso dovuto rinunciare alle sue antiche certezze per adeguarsi alle nuove regole e ai nuovi paradigmi.

Eppure i nuovi paradigmi sarebbero stati essi stessi sottomessi al buon senso, come avrebbe dimostrato Wittgenstein: la decisiva giustificazione di teoremi e dimostrazioni arriva ad un termine

che non è mai verità ed evidenza assoluta, ma riflesso di abitudini acquisite dal senso comune che si forma con l'apprendere e con l'agire.⁷ E Poincaré avrebbe ancor prima osservato che le tesi di Russell non erano in grado di rimuovere l'apriorismo kantiano, e l'intuizione del tempo, dopo Cantor, avrebbe ancora dovuto giocare un ruolo importante, se non decisivo.

Cartesio fu anche tra i primi a intuire l'infinito sotto angoli visuali destinati a svolgere un ruolo preminente nella storia successiva. In una lettera del 1630 egli confutava a Mersenne un argomento dimostrativo assai diffuso circa l'inesistenza di insiemi infiniti. Mersenne esibiva la semplice constatazione che una eventuale linea infinita dovrebbe contenere infiniti piedi e anche infinite tese, che sono 6 volte più grandi di un piede. L'insieme infinito di tese avrebbe dovuto allora contenere assurdamente come suo sottoinsieme proprio l'infinito insieme di piedi, pur coincidendo entrambi con la linea infinita. La conclusione doveva allora essere la seguente: la linea infinita non può esistere in quanto, esistendo, dovrebbe coincidere con ciascuno di due insiemi infiniti di cui uno più grande dell'altro.

Cartesio accettò tranquillamente il paradosso, ma negò che si potessero trarre le conclusioni che a Mersenne sembravano scontate. Il paradosso rivelava anzi una caratteristica prevedibile di ogni insieme che si presentasse infinito: il rapporto tra una tesa e un piede è un numero *finito*, il che rende a priori incompatibile l'osservazione di Mersenne con ciò che è invece attinente all'infinito e alle sue leggi. Le norme che regolano un'eventuale confrontabilità tra insiemi infiniti non possono che trascendere del tutto ogni proporzione finita come quella che stabilisce il rapporto tra un piede e una tesa.

In realtà l'obiezione di Cartesio era profonda e coglieva uno dei nodi del problema. Lo dimostra il fatto che due secoli più tardi Cauchy avrebbe ancora ripreso un esempio non dissimile a quello di Mersenne per dimostrare l'inesistenza di insiemi attualmente infiniti. Cauchy argomentava infatti in questo modo: se assumiamo come data l'intera serie dei numeri interi, potremmo formare anche la serie dei quadrati di questi numeri, facendo corrispondere ad ogni intero n il suo quadrato n^2 . La natura di questa corrispondenza fa sì che le due serie contengano lo stesso numero di elementi, mentre è evidente che l'insieme dei quadrati n^2 è solo una parte dell'insieme «più grande» formato da tutti i numeri interi n .

Questo esempio paradossale, attribuito da Cauchy a Galileo, doveva dimostrare allora l'inconcepibilità dei numeri interi come totalità attuale, cioè come insieme attualmente infinito. Ma l'obiezione di Cartesio avrebbe avuto ancora le sue ragioni di imporsi. Egli non negava il paradosso, ma ne faceva una conseguenza immancabile dell'infinito: l'infinito è paradossale

proprio perché ad esso non si adattano le leggi di confrontabilità del finito.

In verità Cartesio non avrebbe difeso l'esistenza dell'infinito in atto, ma non l'avrebbe fatto con gli argomenti di Cauchy. L'elemento formale e limitante che pur deve possedere un eventuale infinito in atto non può coincidere con l'analogo contenuto formale degli insiemi e dei numeri finiti: ne differisce anzi proprio perché si tratta di un «infinito» e non di un «finito». Nella tesi di Cauchy era invece implicita l'idea che l'atto, per esistere, dovesse essere finito. Egli aveva così ripetuto, in sostanza, la semplice verità che non si possono contare *tutti* gli interi uno per uno fino ad arrivare ad un termine conclusivo, rivelando in tal modo di sentirsi costretto a pensare la raggiunta infinità in termini di totalità finita, come se, invece di avere contato tutti i numeri, ne avesse contati dieci o cento.⁸

R. Dedekind pensò infine di capovolgere la tesi di Cauchy, usando il paradosso, anziché come prova dell'inesistenza dell'infinito, come contenuto essenziale della sua stessa definizione. Gli insiemi infiniti divennero per Dedekind quegli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con una loro parte, proprio allo stesso modo in cui gli interi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i loro quadrati ($n \leftrightarrow n^2$), oppure con i numeri pari ($n \leftrightarrow 2n$).

L'idea di Dedekind si dimostrò, infine, ineccepibile. Fra i suoi pregi si poté anche annoverare la definitiva confutazione dell'idea che in un eventuale oggetto matematico che riproducesse l'infinito dovesse riconoscersi la caratteristica di entità «massima». In realtà questo possibile fraintendimento era stato già denunciato da I. Kant, nella nota alla tesi della prima antinomia: il concetto di infinito non coincide con quello di massimo, è ivi spiegato, ma può essere pensato solo come rapporto rispetto ad un'unità *presa a piacere*, nel senso che esso è maggiore di un qualsiasi numero assegnato di tali unità. Così l'infinito non diventa maggiore o minore in proporzione all'unità scelta, e al variare di questa unità esso rimane, come infinito, invariato. La sua essenza consiste piuttosto nella capacità a comprendere e contenere ogni quantità raggiungibile con il puro procedimento del contare. Hegel avrebbe ripetuto che si tratta in tal caso di un rapporto, di una qualità e non di una quantità; non si può intendere l'infinito indicando quanto «grande» esso sia.

1. R. Descartes, *Oeuvres et lettres*, Paris, 1953, p. 352.

2. *Ibidem*, p. 300.

3. *Ibidem*, p. 294.

4. P. Florenskij, *Le porte regali, saggio sull'icona*, Milano, 1977, p. 49.

5. Cito dall'edizione italiana, *Parerga e paralipomena*, Torino, 1963, pp. 129-130.

6. Cfr. B. Russell, *Knowledge of the External World*; trad. it. *La conoscenza del mondo esterno*, Milano, 1975, pp. 140-141.
7. Cfr. *Della certezza*, Torino, 1978, p. 35.
8. Cfr. L. Couturat, *De l'infini mathématique*, Paris, 1973, p. 445.

IX

LEIBNIZ

L'altro aspetto dell'infinito di cui Cartesio anticipò l'intendimento e l'assimilazione era una variante di quello che fu chiamato a partire da Leibniz «principio di continuità».

In una lettera a Desargues¹ Cartesio approvò l'idea di considerare un fascio di rette parallele come un caso particolare di un sistema di rette concorrenti in un unico punto. Se le rette sono parallele non c'è dubbio che è loro attribuibile una proprietà comune, che potrebbe definirsi senza ambiguità come la loro «direzione». Ma questa «direzione» può anche chiamarsi «punto all'infinito» per chi contempi la fuga prospettica delle rette parallele che si allontanano indefinitamente in uno sfondo immaginario o reale. L'idea di chiamare con il nome di punto una direzione venne a Desargues proprio dalle ricerche sulla prospettiva: il raggio visuale che segue la comune direzione delle rette tende a fissarsi in un punto limite «all'infinito» che appare l'ideale punto di incontro delle linee rette.

Il ruolo svolto dalla prospettiva rinascimentale fu determinante, come già osservò Erwin Panofsky, per il sorgere di una nuova idea dell'infinito. Ricollegandosi a Cassirer, Panofsky scorre nella prospettiva una di quelle «forme simboliche» per mezzo delle quali «un particolare contenuto spirituale viene connesso a un concreto segno sensibile e intimamente identificato con questo».² E la preparazione di questo avvenimento ha radici lontane: mentre il mondo dei Greci era essenzialmente discontinuo e svolgentesi in un antagonismo irriducibile dell'informità e resistenza passiva dello spazio di contro al delinearsi della forma, già la metafisica neoplatonica, l'arte bizantina e la pittura e scultura romanica e gotica rivelarono una percezione dello spazio come «quantum» continuo, come fluido omogeneo in crescente assonanza con le figure da esso emergenti. Il carattere «infinito» di questo spazio non poteva essere ignorato dai Greci, ma la rilevanza di quest'infinità per la rappresentazione figurativa era tutta nel carattere negativo e «materiale» dell'ἄπειρον.

La χώρα platonica era sinonimo di indeterminazione e sostanzialità, era «ricettacolo» delle forme, condizione prima del loro crescere e diversificarsi; le sue caratteristiche erano quelle

dell'infinità. Giorgio de Santillana avanza l'ipotesi che la struttura ordinata del mondo trovasse nel pensiero arcaico la sua forma primigenia nella ciclicità del tempo e che fosse per l'appunto lo spazio in sé, nella sua indeterminatezza, il principio antagonista di ogni assurdità e incoerenza. In Platone, egli osserva, lo spazio era identificato come Non-Essere. La prima frantumazione dell'unità cosmica legata dai cicli del tempo non avvenne con Copernico o Keplero: essi «rifuggirono entrambi dall'illimitato».³ E perfino Galileo rimase ancora dominato dalla ciclicità. «La Scordatura del Mondo, la dissoluzione del Cosmo» scrive de Santillana «sarebbe arrivata solo con Cartesio».⁴ Lo spazio divenne allora il territorio più propizio per le esemplificazioni delle opposte concezioni dell'infinito: dove sarebbe stato più innaturale, per un Greco, apporre la rappresentazione di un ἐνεργεία ἀπειρον, se non nello spazio? Eppure fu proprio nello spazio a collocarsi con i Lorenzetti, Jan van Eyck, Dieric Bouts, un'immagine dell'infinito attuale visibile come punto di fuga delle linee di profondità. La razionalizzazione dello spazio ad opera di Cartesio, scrive Panofsky, trova l'ideale premessa in questa estensione infinita ove ha fatto irruzione l'essere positivo, l'affermazione di esistenza culminante nella visibilità di un punto ove appare racchiusa e unificata l'intera infinità dello spazio visivo.

In qual senso si può affermare che i punti all'infinito sono un'applicazione speciale del principio di continuità? Uno dei modi in cui Leibniz formulò successivamente questo principio è il seguente: se la differenza tra due casi o configurazioni può diminuire al di sotto di ogni livello effettivamente assegnabile in dati concreti, allora è necessario che tale differenza *possa trovarsi diminuita al di sotto di ogni quantità assegnata* anche in quelle configurazioni che non possono esistere «in concreto» ma solamente cercate e immaginate come risultato di una variazione continua.

Se si immaginano allora due rette non parallele su un piano, esse si incontrano certamente in un punto. Ma facendo variare con continuità le loro direzioni fino a renderle parallele, il punto di intersezione si allontana indefinitamente sul piano fino a sparire del tutto nel caso limite del parallelismo. Ciò che le rette hanno in comune in tutte le configurazioni intermedie deve allora in qualche modo essere presente anche nell'ultima conseguenza della variazione, rappresentata appunto dal parallelismo. L'ordine dei dati deve trasmettersi in un ordine analogo ravvisabile nel punto irraggiungibile cui essi sono orientati; punto che è in sé invisibile, ma indirettamente rivelato dall'*unicità* della direzione che definisce il parallelismo.

La giustificazione dei punti all'infinito risiede anche nella loro «visibilità» come configurazioni geometriche ordinarie, spesso in virtù di semplici trasformazioni proiettive ed omografiche:

fissando ad esempio alcuni punti di riferimento fondamentale su una coppia di rette il punto all'infinito di una di esse può essere fatto corrispondere ad un punto «al finito» sull'altra, e una variazione continua verso l'infinito sulla prima può corrispondere ad un percorso finito sulla seconda.

Tali deduzioni apparentemente ineccepibili sull'«esistenza» dell'infinito e sulla sua raggiungibilità per via di movimenti continui erano il risultato di un'idea dell'infinito pressoché opposta a quella che aveva ispirato Aristotele. Il punto finale di questo mutamento non si può meglio esprimere che nella contrapposizione di due lapidarie dichiarazioni, che sono come i vertici dell'insieme delle possibili espressioni di due inconciliabili visioni del mondo. La prima, tratta dalla *Generazione degli animali* (715 b 15) di Aristotele dice testualmente: «La Natura... evita ciò che è infinito, poiché l'infinito è privo di quella completezza e finalità verso cui la Natura è costantemente tesa».

La seconda dichiarazione, contenuta in una lettera di Leibniz al marchese de L'Hôpital (1693), afferma l'altra verità: «La perfezione dell'analisi dei trascendenti e della geometria ove entri la considerazione di qualche infinito sarebbe senza dubbio la più importante a causa dell'applicazione che se ne può fare alle operazioni della natura, che fa intervenire l'infinito in tutto ciò che essa fa». In effetti, annota altrove lo stesso Leibniz, «il carattere dell'Autore infinito interviene ordinariamente nelle operazioni della natura».⁵

La meraviglia provocata dalla contemplazione dell'infinitamente piccolo fece scrivere a Leibniz parole rivelatrici, da cui non poco si può dedurre circa il senso delle sue innovazioni matematiche. «Ogni porzione di materia» si legge nella *Monadologia* (67-68; trad. it., Bari, 1937, p. 143) «può essere raffigurata a un giardino pieno di pesci. Ma ciascun ramo di una pianta, ciascun membro d'un animale è ancor esso un simile giardino, un simile stagno». «E benché» scrive ancora Leibniz «la terra e l'aria intercettate tra le piante del giardino, o l'acqua intercettata tra i pesci dello stagno, non siano né pianta né pesce, tuttavia ne contengono anch'esse, ma per lo più di tale piccolezza, da riuscire a noi impercettibile».

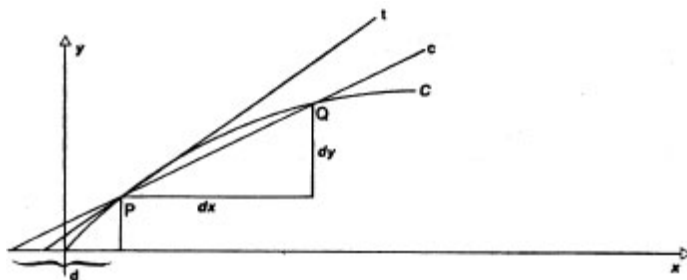
«La matematica di Leibniz,» osservò L. Brunschvicg⁶ «prevedendo l'esistenza di diversi ordini di infinità e di diversi gradi di differenziabilità, consentiva di configurarsi il reale, e gli infiniti in esso riscontrabili, come immersi in una più sottile tessitura, intrecciata con l'immensa varietà di combinazioni del possibile. La saggezza divina, spiegava Leibniz, arriva molto al di là delle combinazioni finite riscontrabili nella realtà; essa ne fa un'infinità di infiniti, cioè un'infinità di successioni possibili dell'Universo, di cui ciascuna contiene un'infinità di creature».⁷ Nei più sottili interstizi di questo ordinamento intervengono i meccanismi di trasformazione della realtà, di realizzazione del

possibile. Essi sono còlti, per così dire, nel loro essere a capo di uno stato nascente in cui si trovi racchiuso il massimo di potenzialità illimitata unita alla massima concentrazione di entelechia, di essenza delimitante. La scienza va così a cercare la caratteristica dell'azione e del mutamento «nell'elemento momentaneo, nella forza tendente al cambiamento» che è per Leibniz il principio stesso della realtà e la causa più riposta del suo funzionamento dinamico.

Tali sollecitazioni infinitesime, suscettibili di un'esistenza ideale più che reale, per le quali tuttavia la forma concreta scaturisce dal possibile, non erano altro che i differenziali dx ; ⁸ la matematica era l'immagine più somigliante dell'infinita complessità della macchina naturale.

La stessa definizione di differenziale quale fu introdotta da Leibniz in modo puramente geometrico (Leibniz non definì il differenziale mediante il concetto di funzione) suggeriva l'idea di una specie di forza primitiva, di un'essenza invisibile da cui fossero deducibili gli effetti dell'ordinaria apparenza fenomenica. Vale la pena descrivere brevemente il procedimento di Leibniz. ⁹

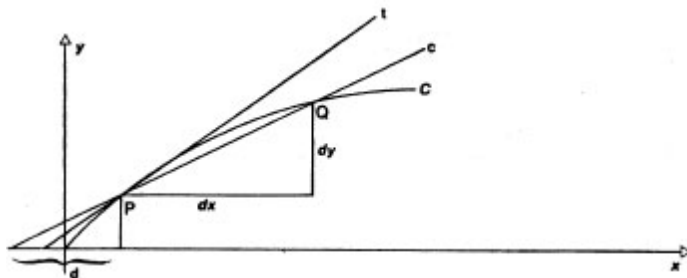
Il ragionamento può svolgersi intorno a una curva C disegnata su un piano cartesiano con i due assi di riferimento x e y . Se dx e dy rappresentano due corrispettive variazioni finite di x e y nel passaggio dal punto P (di coordinate x e y) al punto Q (di coordinate $x + dx$ e $y + dy$) sulla curva C e Δx è un segmento fissato, si potrà definire una quantità Δy per mezzo della relazione



ove il rapporto $dy : dx$ individua, per note relazioni trigonometriche, la tangente dell'angolo formato dalla retta c , passante per P e Q , con l'asse x .

Se ora dx diminuisce fino ad avvicinarsi arbitrariamente allo zero, il rapporto $dy : dx$ diventa il rapporto tra due grandezze molto piccole. Se poi dx giunge ad annullarsi definitivamente, allora la retta c , attraversando infiniti passaggi intermedi, si identifica infine con la retta t che è tangente nel punto P alla curva C . Ciò significa, spiega Leibniz, che la quantità Δy può essere definita anche quando $dx = 0$, poiché il rapporto $\Delta y : \Delta x$

deve in tal caso coincidere con la tangente dell'angolo formato dalla retta t con l'asse x ; $\Delta y : \Delta x$ rimane cioè sempre un rapporto finito anche nel caso estremo in cui $dx = 0$, per cui si ha $\Delta y : \Delta x = y : d$ (d è la distanza tra l'intersezione della retta t con l'asse x e la proiezione del punto P sullo stesso asse).



Per $dx = 0$ il rapporto $dy : dx$ è quindi ancora interpretabile, in virtù della (1), come rapporto tra quantità finite, e quindi esso significa ancora *qualcosa*. Ma questo *qualcosa*, non potendo essere espresso assegnando a dx un valore *rigorosamente* nullo (il che produrrebbe un non senso e una completa indeterminazione del problema), dovrà preferibilmente associarsi a un concetto che alluda allo «zero» pur conservando intatto ciò che risulta visibile in una regolare situazione macroscopica. Questo concetto è quello di *infinitesimo*. In tal caso si dirà che dx e dy sono due *infinitesimi* e risulterà naturale pensare all'infinitesimo come ad una *quantità più piccola di qualsiasi quantità finita assegnata*.

Se si volesse ora dare un nome al meccanismo che ha reso possibile il raggiungimento dell'infinitesimo, ci si troverebbe costretti a invocare il principio di continuità. È proprio questo principio che in virtù della visibilità 'in concreto' della soluzione finale di una variazione (la retta tangente) rende significativo il rapporto $dy : dx$ anche nel caso limite in cui $dx = 0$. L'ambiguità concettuale che si è sempre voluta scorgere nella definizione di infinitesimo è allora tutta nell'applicazione di questo principio; nel supporre che una certa configurazione si ponga come l'ultimo caso, effettivamente raggiunto, di una successione infinita di casi intermedi.

Leibniz non concepì in nessun modo il limite come lo avrebbe inteso Weierstrass, cioè come una grandezza o una configurazione cui è possibile avvicinarsi indefinitamente senza mai raggiungerla. Il valore del rapporto $dy : dx$ divenne, nella matematica di Weierstrass, un limite situato al di fuori della successione di valori ad esso orientati ottenuta in corrispondenza del progressivo avvicinamento della retta e alla retta tangente t , e su questa nozione di limite, in perfetta coerenza a ciò che lo

stesso Aristotele avrebbe potuto obiettare alle tesi leibniziane, risulta possibile riformulare rigorosamente le definizioni e i teoremi ispirati al principio di continuità.

Leibniz concepì piuttosto i suoi risultati come una sorta di estrapolazione all'infinito dei concetti riferibili al calcolo di successioni finite;¹⁰ e questi stessi risultati, ponendosi come la meta finale di un percorso illimitato, erano l'apparente dimostrazione dell'esistenza dell'infinito attuale. In questa prospettiva una curva poteva essere considerata, e questa era una delle idee più ricorrenti nel calcolo differenziale, come una linea poligonale con un numero infinito di lati; equivalentemente una serie «discreta» di numeri era estendibile al caso «continuo» di una somma infinita di differenziali, cioè all'integrale concepito come attualità infinita effettiva, risultato tangibile di un'evidente applicazione del principio di continuità. Concettualmente si trattava di un riavvicinamento alle tesi già sostenute da Antifonte a proposito della quadratura del cerchio: la confutazione aristotelica avrebbe potuto applicarsi con la stessa efficacia ad alcuni argomenti leibniziani.

In assenza di una più rigorosa descrizione dei risultati dell'Analisi mediante l'idea di «passaggio al limite», Leibniz continuò a parlare degli infinitesimi dx come di «finzioni» utili all'arte dell'invenzione matematica, come entità immaginarie non corrispondenti per necessità a cose attualmente esistenti al di fuori della mente che le concepisse. Invece degli infinitesimi, egli scriveva, si sarebbero potute usare espressioni del tipo «piccolo quanto occorre affinché l'errore sia più piccolo di qualsiasi errore assegnato», ovvero: all'infinito attuale, che interveniva nei procedimenti matematici coinvolgenti l'infinitesimo, era sostituibile l'infinito potenziale delle dimostrazioni per esaurimento di Eudosso e Archimede. Lo stesso Leibniz era consapevole di certe anomalie e ambiguità connesse all'uso di incrementi infinitamente piccoli. «Tali incrementi» egli osservava «non possono essere esibiti da alcuna costruzione. Io sono in effetti in accordo con Euclide (5^a definizione del Libro V) che solo quelle quantità omogenee sono raffrontabili, di cui l'una può diventare più grande dell'altra se moltiplicata per un numero, cioè un numero finito. Io asserisco che le entità la cui differenza non rientra in questa specie di quantità sono uguali... Ciò è precisamente quello a cui alludo dicendo che la differenza è più piccola di ogni quantità assegnata».¹¹

Le tecniche del nuovo calcolo imponevano dunque di 'trascurare' gli infinitesimi rispetto alle ordinarie quantità finite, e questa regola diventò in seguito uno dei primi degli assiomi elencati nel primo libro sul calcolo infinitesimale scritto alla fine del '700 dal marchese de L'Hôpital (un allievo di Leibniz): due quantità che differiscono per un infinitesimo sono uguali. È chiaro, tuttavia, che due quantità che differiscono per un'altra

quantità, sia pure molto piccola, non possono essere uguali se non al prezzo di una contraddizione logica o di un'approssimazione; ed è certo che il calcolo infinitesimale *non* fu mai un metodo di approssimazione.

L'altra caratteristica, quella di non obbedire al criterio di confrontabilità tra grandezze omogenee enunciato da Euclide, era pur essa fonte di prevedibile perplessità. Il così detto principio di Archimede, in cui consisteva questo criterio, prevedeva che una qualsiasi grandezza, anche molto piccola, se sommata a se stessa per un sufficiente numero di volte può generare una grandezza arbitrariamente grande. In tal senso l'infinitesimo non era 'archimedeo', perché la sua utilizzazione nel calcolo prevedeva che la moltiplicazione per un numero finito arbitrariamente grande non alterasse la sua caratteristica di entità vicina allo zero: un infinitesimo moltiplicato per un qualsiasi numero finito produce ancora un infinitesimo.

Queste anomalie non potevano che rafforzare il carattere di «finzione» che Leibniz attribuiva alle quantità infinitamente piccole. Eppure era chiaro che l'infinitesimo corrispondeva ad un modo più diretto di considerare e quindi di risolvere il problema di cui le tecniche di Eudosso e Archimede avrebbero consentito una più rigorosa descrizione. Ma Archimede stesso, pensava Leibniz, concepì probabilmente i suoi risultati in termini di grandezze infinitesimali e li tradusse poi nel linguaggio dell'infinito potenziale. I vantaggi operativi del calcolo differenziale erano tali da poter stabilire una volta per tutte il richiamo ad una sua traducibilità nelle tecniche archimedee; l'utilità dell'innovazione e la coscienza di questa traducibilità erano allora sufficienti a rendere tollerabili le ambiguità concettuali implicite in questo rivoluzionario esercizio matematico. Tuttavia non si direbbe interamente la verità limitandosi ad asserire che tutto il senso dell'infinitesimo si ridusse alla sua convenienza operativa. Le finzioni infinitesimali furono per Leibniz *finzioni ben fondate*, e il riferimento concreto cui esse non potevano non alludere nella realtà naturale, ove l'infinito interveniva ormai costantemente, rendeva tanto più verosimile la loro funzionalità come mezzi di calcolo. Le ambiguità concettuali connesse al loro uso erano ricompensate dal successo applicativo di un calcolo i cui meccanismi assomigliavano troppo bene a quelli della natura. «Gli infiniti e infinitamente piccoli» poteva scrivere Leibniz «sono talmente fondati che tutto si fa nella geometria, e così pure nella natura, come se fossero delle perfette realtà».¹²

Il differenziale era il corrispettivo analitico, manovrato nello spirito della geometria cartesiana, dell'infinita sottigliezza del reale. Le sollecitazioni, le velocità, le forze erano tutte descrivibili come entità essenzialmente istantanee, e coinvolgevano per questo grandezze infinitesimali: l'infinitesimo

era la descrizione di un movimento o una variazione nel suo stato germinale ed era perciò una specie di quintessenza e archetipo della forma, di cui anticipava il manifestarsi come suo invisibile impulso. («Vis autem derivativa» scrisse Leibniz «est ipse status praesens, dum tendit ad sequentem seu sequentem praeinvolvit»).¹³

La produttività interna e l'infinita fecondità della monade erano il corrispettivo reale della potenza puramente ideale della finzione geometrica; l'infinità dei predicati della sostanza assomigliava a quella dei termini di una serie convergente; la somma della serie era finita allo stesso modo in cui la sostanza si presentava finita in grandezza.¹⁴

La caratteristica della forma, della figura geometrica, era di essere un'unità vista nella prospettiva di una serie infinita di termini componenti. Il processo di integrazione poteva allora considerarsi come la transizione ideale ad un compimento effettivo della forma, realizzata non come limite, ma come sintesi riassuntiva di un'infinita molteplicità e in definitiva come infinito attuale. Ogni forma della natura era il risultato visibile di un analogo meccanismo.

Non c'è da stupirsi che la certezza di vedere l'infinito ovunque presente e operante provocasse al fine l'idea di designarlo come semplice segno algebrico. E questa fu probabilmente la più rivoluzionaria innovazione.

Già Cartesio aveva offerto dell'infinito l'immagine di un'entità chiara e distinta, elencandone i paradossi come le naturali e inevitabili caratteristiche di un'entità incompatibile con l'ordinaria percezione del limite. Nelle sue parole è già riconoscibile la rinuncia a una contemplazione dell'infinito attraverso un'autentica mediazione dialettica, a un suo configurarsi come punto limite di un'attività mentale procedente per ipotesi e *contraddizioni* e svolgentesi nella *negazione* costante di ogni angolo visuale determinato che si proponga di centrare la verità dell'oggetto. Il valore conoscitivo della contraddizione, già rivelato da Platone nei suoi *Dialoghi*, ma anche ripreso in epoca recente ad esempio da K. Popper (in *Scienza e filosofia*, Torino, 1969, p. 42, Popper giunge a dichiarare che le *falsificazioni* delle teorie indicano «i punti in cui abbiamo, per così dire, toccato la realtà»), viene soppiantato da una decisa inclinazione a considerare financo l'illimitato come forma mentalmente accessibile e analizzabile con gli strumenti della ragione. Il tono di certe risposte di Cartesio alle obiezioni mossegli da Mersenne fa capire che il paradosso dell'infinità non è più un motivo accettabile per proclamarne l'inesistenza. Le contraddizioni della dialettica fanno capire *che cosa* è l'infinito anziché autoproclamarsi inadempienti alla reale comprensione dell'idea. L'infinito, pur negativamente sperimentato come assenza di limite, è diventato qualcosa di esplicito e di *positivo*,¹⁵

perdendo definitivamente l'originaria caratteristica di sinonimo della negazione e del non-essere, che ne facevano l'ἄλογος per eccellenza, l'innominabile senza rimedio.

Non ancora negli scritti di Cartesio, tuttavia, o in quelli di matematici pre-leibniziani come Keplero, Galileo, Fermat, Pascal, oppure Cavalieri e il suo allievo Mengoli, l'uso matematico dell'infinito apparve come autentico *meccanismo*, come calcolo riprodotto in altri simboli (trascendenti) gli automatismi dell'algebra.

L'infinito era stato ben presente e intuibile nella matematica che precedette l'analisi differenziale, e se pur ancora sconosciute a quel tempo, anche le dimostrazioni del *Metodo* di Archimede ne avevano già offerto un'immagine riconoscibile (mai compromettente, in ogni caso, la sua fisionomia di λόγος ἄλογος). Ma i Greci non vollero capire o accettare i vantaggi della generalizzazione algebrica. Fu invece Leibniz a scoprirli e a esaltarli. «Ciò che amo di più in questo nuovo calcolo» finì per scrivere a Huygens nel 1691 «è che esso ci offre gli stessi vantaggi sugli antichi nella Geometria d'Archimede che Viète e Descartes ci hanno offerto nella Geometria di Eudosso o di Apollonio, dispensandoci di lavorare con l'immaginazione».

L. Brunschvicg tracciò la dipendenza ideale dell'invenzione leibniziana dallo spirito della filosofia e della matematica di Cartesio. A cominciare dai cartesiani «la nozione dell'infinito è così semplice, così chiara e così distinta quanto può esserlo quella del finito, di cui l'algebra consente di sviluppare le proprietà analitiche seguendo l'ordine della ragione. Dopo Pascal c'è una geometria dell'infinito, che è irriducibile alla geometria cartesiana; ma i principi non possono esserne esplicitati nel linguaggio della comprensione, essi sono l'oggetto di intuizioni *sui generis*; le conclusioni ne costituiscono uno scandalo per il senso comune, per la ragione ragionante dei logici. Lo scopo di Leibniz è stato quello di dare alla geometria di Pascal, alla geometria degli indivisibili, la forma dell'analisi cartesiana. Dopo Archimede, o almeno dopo Cavalieri, i procedimenti di integrazione non erano più da scoprire, né dopo Fermat i procedimenti di differenziazione; ma restava da comprendere tali procedimenti nell'unità di un sistema intellegibile. ... Proprio là ove Pascal si trovò gli occhi sbarrati come per una specie di fatalità egli [Leibniz] scorge la possibilità di una nuova generalizzazione che implicherà essa stessa la necessità di esplicitare ciò che l'intuizione sottintendeva, di tradurre gli elementi infinitamente piccoli in simboli analitici. Leibniz si pone allora alla scuola di Descartes».¹⁶

Continuò la matematica a utilizzare i simboli di Leibniz? La nozione di infinitesimo rimase in realtà nel linguaggio matematico e non cessò, anche dopo Weierstrass, di essere usata come finzione didattica. Prima dei lavori di Skolem (1934) sui

modelli non-standard dell'Aritmetica e prima della dimostrazione del Teorema di Compattezza (come fu battezzato da A. Tarski il risultato di A.I. Malcev del 1936) e delle sue implicazioni nell'Analisi non-standard (1966), non si ritenne mai, tuttavia, che gli infinitesimi potessero appellarsi ad una solida evidenza concettuale.¹⁷ Nel 1942 A. Church dichiarava di stimare preferibile introdurre nell'insegnamento i differenziali «in un modo apertamente impreciso ed euristico come piccoli valori dell'incremento, o piccole variazioni [*little bits*] della quantità variabile implicata, anziché rivestire l'idea con l'ingannevole apparenza di una precisione logica».¹⁸

Ma è degna di rilievo la circostanza che l'infinitesimo continuò appunto ad essere *usato* in taluni settori della disciplina matematica e nella pratica applicativa, pur soffrendo fino alle soglie dei lavori di Skolem e di Robinson, come fa capire la testimonianza di Church, di una netta mancanza di credito per il suo esplicito carattere di finzione. La concessione di Leibniz sulla natura puramente ideale delle quantità infinitamente piccole, che avrebbero potuto in ogni momento venire soppresse in omaggio ad una più rigorosa descrivibilità con il metodo di Archimede, finì per costituire l'alibi principale di una loro sopravvivenza nell'Analisi fino all'opera di Weierstrass. Secondo l'opinione di A. Robinson, per cui l'Analisi non-standard era in grado di riproporre una versione aggiornata della storia del Calcolo orientata a una rivalutazione dell'infinitesimo, questa singolare mistione di permissività linguistico-applicativa e di incompatibilità logica che fiorì sulla base delle dichiarazioni concilianti di Leibniz fu in grado di offuscare perfino l'intendimento delle reali intenzioni di alcuni dei matematici tradizionalmente collocati all'inizio della rifondazione dell'Analisi nell'800. Cauchy, ad esempio, parlò sovente di infinitesimi e ne fece uso costante nelle definizioni cruciali; ma non è chiaro abbastanza fino a che punto egli li considerasse una mera abbreviazione linguistica di formule più rigorose, o non piuttosto una parte insostituibile delle dimostrazioni e degli enunciati dei teoremi. Nel suo *Cours d'analyse* (Paris, 1821, p. 4) Cauchy tentò di ricondurre l'infinitesimo alla nozione di «variabile», nel cui ambito poteva allora restare intatta la natura potenziale dell'infinito, scrivendo che «quando i successivi valori numerici di una variabile decrescono indefinitamente così da essere più piccoli di ogni numero dato, tale variabile diventa ciò che si chiama *infinitesimo*, ovvero quantità infinitamente piccola». E in termini di esplicito richiamo all'infinito Cauchy si esprime anche per definire la continuità di una funzione, introducendo una formula che si sarebbe dimostrata nel seguito di sicura efficacia didattica: una funzione $f(x)$ è continua se variazioni infinitesimali della x procurano variazioni infinitesimali nella f . E la stessa idea di incremento infinitesimo si riscontra nella sua definizione di

derivata. Non solo, ma anche teoremi nel cui enunciato Cauchy non si fece scrupolo di ricorrere all'infinitamente piccolo risultarono esatti in virtù di una semplice traduzione nel linguaggio dell'Analisi non-standard, sostituendo gli infinitesimi come incremento di variabili con gli infinitesimi come entità perfettamente definite in un opportuno ampliamento del campo dei reali nel senso di Robinson. Il celebre teorema 'sbagliato' di Cauchy sulla continuità della funzione limite di una somma convergente di funzioni continue è uno di quei casi che dimostrerebbero come la descrizione «abbreviata» in termini di quantità non-archimedee non fosse poi tanto una convenzione linguistica, ma una condizione essenziale dell'enunciato: una traduzione nei termini puramente finiti della tecnica ε - δ di Weierstrass avrebbe dovuto far intervenire in modo esplicito la nozione di «convergenza uniforme» spiegata non pochi anni dopo da Weierstrass, e sarebbe stata dopo tutto, da parte di Cauchy, un'improbabile iniziativa.¹⁹

«Perciò» concluse Robinson «Cauchy s'inquadra nella storia del calcolo non come un uomo che rompe con la tradizione ma piuttosto come un collegamento tra il passato e il futuro. Gli elementi della sua teoria possono essere rintracciati indietro fino a Newton e Leibniz (e oltre), ma egli produsse una sintesi tra la dottrina dei limiti da un lato e la dottrina delle quantità infinitamente piccole e grandi dall'altro, assegnando un ruolo centrale alla nozione di variabile tendente a un limite, in particolare al limite zero».²⁰

L'eclissi progressiva dell'infinitesimo culminò nell'opera di Weierstrass, ma dopo di lui vari tentativi di recupero furono intrapresi da Du Bois-Reymond, Stolz, Schmieden e Laugwitz e Skolem. A. Robinson, infine, ricollegandosi principalmente ai lavori di Skolem sui modelli non-standard dell'Aritmetica, enunciò con i toni di una definitiva certezza che le finzioni di Leibniz *esistevano*. Esisteva cioè, in virtù di un teorema della logica dei predicati (il teorema così detto di compattezza), un'estensione dell'ordinario campo dei reali $\mathbb{R}$, chiamiamolo $^*\mathbb{R}$, includente infinitesimi e infiniti; una dimostrazione, questa, che Leibniz non aveva mai elaborato, pur trovandosi evidentemente nel giusto nell'esercizio di fatto delle tecniche infinitesimali. Ma di quale *esistenza* realmente si tratta? È rilevante il fatto che la dimostrazione del teorema di compattezza implica una sorta di estrapolazione all'infinito e un'affermazione deliberata dell'attualità di quest'ultimo nell'uso che essa fa degli *ultrafiltri* e del *Lemma di Zorn* (o dell'*Assioma della Scelta*) notoriamente avversato dalla matematica intuizionista. E il *senso* di un risultato, suggerisce Wittgenstein, non si può leggere solamente dalla *proposizione* che lo descrive, bensì soprattutto dalla *dimostrazione* e dal nuovo edificio concettuale che questa non può fare a meno di erigere. «In matematica» egli scrive «siamo

convinti di proposizioni *grammaticali*; l'esposizione, il risultato del fatto che siamo convinti consiste dunque nel fatto che *accettiamo una regola*». E quindi «nulla è più probabile del fatto che l'espressione linguistica del risultato di una prova matematica sia stata coniata in modo da ingannarci con un mito».²¹ «Che cosa è esatto nella matematica» si era chiesto Goethe «se non l'esattezza?».

I fondamenti logici dell'infinitesimo poggiano interamente, del resto, sul calcolo dei predicati e sulla quantificazione; e sarebbe arduo escogitare un espediente che faccia trasparire le implicazioni ontologiche di una scienza meglio di quanto lo faccia l'ordinaria logica dei predicati governata dai quantificatori universali ed esistenziali. Ma sarebbe allora prudente affidarsi, per il riconoscimento di oggetti che appartengano ai valori delle variabili vincolate da un operatore esistenziale, anche alle circospette enunciazioni di W.V. Quine di *From a Logical Point of View* o *Word and Object*. Il riconoscimento di certe entità da parte di una teoria, spiega Quine, è una mera conseguenza della loro attitudine a soddisfare, se sostituite alle variabili quantificate, alcune proposizioni di questa teoria; a fare in modo cioè che tali proposizioni siano vere (vere, si potrebbe aggiungere, nel senso descritto ad esempio da A. Tarski nel suo articolo *The concept of truth in formalized languages*: cfr. *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, pp. 152-268). Ma tutto ciò che avrebbe così l'apparenza di avere conquistato diritto all'essere è subito spostato da Quine sul piano dell'opinabilità e della finzione discorsiva. In *Word and Object* (Cambridge, 1960), ove non si può tener conto ovviamente dei più recenti lavori di Robinson, l'infinitesimo è trattato come mito cosciente e deliberato, feconda quanto fittizia abbreviazione delle più rigorose formule weierstrassiane. Un apprezzamento, questo, pur colmo di una singolare indulgenza, che sarebbe stato certamente riscattato in *Non-Standard Analysis* sei anni più tardi. Ma a proposito di questi infinitesimi *esistenti* sarebbe pur sempre recuperabile un'altra precedente osservazione di Quine, questa volta di *From a Logical Point of View*: parlando di *esistenza* in sede di logica dei predicati quantificata sarebbe preferibile non dare per scontati degli *stati* di cose oggettivamente esistenti, ma intendere solo chiarire, piuttosto, quali sono gli impegni ontologici di un discorso. Si tratta più che altro di *capire* ciò che una lingua coerente dice che esiste, senza dover accettare per questo (cioè per la coerenza) che l'esistenza sia tale per davvero.

In *Meaning and Necessity* (Chicago, 1947) Rudolf Carnap riprese l'enunciato di Quine: «L'ontologia connessa con l'uso di un linguaggio comprende semplicemente gli oggetti che si considerano inclusi... nel campo di valori delle sue variabili». Ma a giudizio di Carnap la parola «ontologia» era già sufficientemente compromettente per essere preferibilmente

evitata. Pur dichiarandosi in accordo, nella sostanza, con Quine, egli rifiutò di indulgere ad un sia pur minimo cenno all'esistenza, di per sé, degli oggetti cui una struttura linguistica potesse fare allusione. Per misurare l'estraneità di ogni eventuale indagine nell'essere 'reale' di taluni oggetti matematici, e per capire in definitiva la qualità dell'atmosfera provocata dalle convinzioni scientifiche che ne hanno ultimamente accompagnato la crescita, è proprio Carnap che vale la pena ascoltare. Egli spazzò via dalla matematica ogni residuo metafisico, ritenne le tradizionali controversie tra realismo e nominalismo pseudo-problemi sprovvisti di qualsiasi significato conoscitivo; ma soprattutto portò all'estremo quella visione pragmatista delle verità matematiche che già B. Bolzano aveva inaugurato con un secolo di anticipo. Ciò che conta, nelle proposizioni della logica matematica, non è la dimostrazione che certe cose esistono, ma la prova plausibile che vale la pena occuparsene. Bolzano scrisse che l'introduzione di proposizioni e verità in sé nella logica doveva fondarsi sulla loro *utilità*; Carnap che la scelta di una struttura linguistica e dei tipi di variabile dovesse considerarsi una decisione pragmatica, quasi si trattasse dello strumento di un ingegnere. E il significato dell'esistenza era allora da rapportarsi all'uso specifico del verbo «essere» all'interno della lingua presa in esame: «essere» come spiegò anche Quine «è essere il valore di una variabile».

Del resto una qualsiasi ammissione assoluta di esistenza o non-esistenza corre sempre il rischio di apparire futile. La debolezza di certe argomentazioni si misura bene quando si affronti il problema parallelo degli universali (classi, funzioni, numeri, relazioni) e se ne traspongano poi le difficoltà al caso delle finzioni. Il nominalista più intransigente che accetti (come di solito fa) una logica quantificata ove i valori delle variabili scorrano tra oggetti inequivocabilmente astratti, ottiene scarso credito nel sostenere la loro inesistenza. E si dà il caso che il nominalismo reifichi gli universali con una disinvoltura che il realista non si sognerebbe, e che arrivi a considerare nei suoi casi estremi gli universali come singoli oggetti concreti.²² La formula realista *universalia ante rem* conforta d'altro canto la tesi che il 'ci sono' riferito agli oggetti astratti sia altra cosa da quello spettante ai dati del senso, e potrebbe suggerire un'analogia collocazione per le finzioni. Dagli operatori esistenziali le finzioni ricevono quella carica fattuale che innumerevoli esempi sembrerebbero loro conferire anche al di fuori di una precisazione formale. Oltre agli infinitesimi si pensi al *Don Chisciotte*, all'*Amleto*, alla risposta di Marx alla confutazione kantiana della prova ontologica di sant'Anselmo, al potere dissolvente delle duplicazioni di Tlön raccontate da Borges in *Ficciones*, a certi enunciati del *Tao tê ching*. Tutto sembrerebbe poter confortare la tesi tradizionale della priorità di

Nāman su *Rūpa*, cioè del nome sulla forma.

1. Cfr. L. Couturat, *op. cit.*, p. 264.
2. E. Panofsky, *op. cit.*, p. 47.
3. *Hamlet's Mill*, cit., p. 342 (trad. it. cit., p. 401).
4. *Ibidem*, p. 343 (trad. it. cit., *ibidem*).
5. *Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendentes*, in «Journal des Sçavans», 1694; cit. in R. Guéron, *Les principes du calcul infinitesimal*, Paris, 1946, p. 45.
6. *Spinoza et ses contemporains*, in «Revue de Métaph. et de Morale», 1906, p. 58.
7. *Ibidem*.
8. *Ibidem*, p. 52.
9. Cfr. H.J.M. Bos, *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*, in «Arch. for History of Exact Science», 14, 1974, pp. 1-90.
10. Cfr. H.J.M. Bos, *op. cit.*, p. 13.
11. Leibniz 1695 a; *Math. Schr.*, V, p. 322. Citato in H.J.M. Bos, *op. cit.*, p. 14.
12. *Lettre à Varignon*, 2 février 1702, cit. in R. Guéron, *op. cit.*, p. 44.
13. Cfr. L. Brunschvicg, *op. cit.*, p. 52.
14. *Ibidem*, pp. 53-54.
15. *Premières réponses aux objections*, in Descartes, *Oeuvres et lettres*, cit., p. 353.
16. L. Brunschvicg, *op. cit.*, pp. 49-50.
17. Una breve rassegna dei tentativi di giustificazione dell'infinitesimo nella prospettiva dei risultati dell'Analisi non-standard si trova nell'ultimo capitolo di A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, rev. ed. Amsterdam, 1974. Un accenno esplicito all'utilizzazione del Teorema di Compatezza per una riformulazione del principio di continuità si trova ad esempio in J.P. Cleave, *Cauchy, Convergence and Continuity*, in «Brit. J. Phil. Sci.», 22, 1971, p. 29.
18. A. Church, *Differentials*, in «Amer. Math. Monthly», 49, 1942, p. 391.
19. Cfr. J.P. Cleave, *op. cit.* e A. Robinson, *op. cit.*, p. 273.
20. Cfr. A. Robinson, *op. cit.*, p. 276.
21. *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, cit., p. 102.
22. Cfr. J. Ferrater-Mora, *Fictions, Universals and Abstract Entities*, in «Phil. and Phenom. Rev.», 37, 1977, pp. 353-367.

IL PRINCIPIO DEGLI INDISCERNIBILI. LE CLASSI

Una perfetta immagine della follia di chi pretenda realizzare l'infinito attuale «in concreto» come descrizione analitica ed esauriente di un insieme di oggetti fu tratteggiata da Musil in una lettera scritta da Clarisse a Ulrich, nella terza parte di *Der Mann ohne Eigenschaften*. La notizia riportata su un giornale di uno scontro ferroviario in Pennsylvania suggerisce a Clarisse un'idea semplicissima: due locomotive che si scontrano sono guidate da macchinisti che presumibilmente non provocano apposta il disastro, ma sono piuttosto ingannati dall'ignoranza di tutta quella fitta rete di eventi che allo scontro risultano legati secondo diverse gradazioni di causalità. «In quella rete mostruosa di rotaie, scambi e segnali che si tende tutt'intorno al globo» spiega Clarisse «noi tutti perdiamo la forza della coscienza. Perché se avessimo la forza di riesaminarci e di riconsiderare il nostro compito, faremmo tutto il necessario ed eviteremmo l'infortunio. L'infortunio è il nostro arrestarci al penultimo passo».¹

Clarisse non resiste in realtà alla tentazione perversa di sentirsi personalmente capace di percorrere quell'ultimo passo: compito proibitivo per chiunque goda i benefici di una pur buona memoria o di un intelletto addestrato, ma non per colui cui capitì la fortuna di essere un genio. La mente di Clarisse corre subito allora ad un'associazione di idee, che rivela quale doveva essere, tra gli uomini, il depositario di quella genialità: «per tutte queste ragioni» ella precisa «stimo mio dovere far la conoscenza di Moosbrugger».

Quando Clarisse farà effettivamente la sua visita all'assassino Moosbrugger in un manicomio criminale, sarà essa stessa, suo malgrado, costretta da circostanze apparentemente fortuite ad arrestarsi al «penultimo passo»: dopo un interminabile preludio di incontri con malati sempre più dissennati e pericolosi il medico accompagnatore verrà al fine distolto da una chiamata urgente; sicché il vero scopo della visita rimarrà irrealizzato.

Come mai Clarisse non riesce a vedere Moosbrugger? Il fatto è che Moosbrugger è uno di quei casi limite che neppure la giurisprudenza ha ritenuto opportuno contemplare. Egli è un uomo capace di realizzare nella propria mente tutta la sterminata

interdipendenza delle cose di questo mondo, consapevole che nulla può essere spiccato completamente dal resto, perché tutto è legato a tutto. Quando gli psichiatri gli mettono sotto gli occhi l'immagine di uno scoiattolo Moosbrugger confessa di vedere una volpe o una lepre, o forse un gatto o altro: egli sa che in diversi paesi lo scoiattolo è chiamato rispettivamente 'gatto della quercia' e 'volpe degli alberi'; e allora è chiaro che «se un 'gatto della quercia' non è un gatto né una volpe né una lepre non è il caso di star lì a sofisticare, ha un po' di tutti e tre e si arrampica sugli alberi».² Ed è proprio questa la sorgente della mite e sanguinaria criminalità di Moosbrugger: chi non distingue e chiama una cosa indifferentemente con un nome o con il suo opposto, perché è innegabile che anche gli eventi più lontani sono stretti da un'invisibile parentela, non conosce neppure ciò che è bene e ciò che è male, essendo ambedue solubili e vanificabili in un'originaria e caotica purezza.

La folle aspirazione di Clarisse di conoscere l'intera complessità di un evento, quale lo scontro dei treni, trova così il suo ideale modello nell'interiorità di Moosbrugger, la cui coscienza dell'infinita rete di rapporti delle cose è raggiunta solo al prezzo della più completa informità e apatia, paragonabile solo all'indifferenza reciproca delle particelle del caos primigenio descritto da Anassagora o Anassimandro. L'intolleranza per qualsiasi forma compiuta che riveli qualche pretesa di permanenza genera allora l'istinto omicida, che tutto vuole ridurre al nulla originario.

Non all'omicidio, bensì alla torvaggine rimuginante, alla disintegrazione di un'attività mentale governata da ritmi naturali e ordinati, è condotto dall'errore dell'infinito *l'uomo del sottosuolo* di Dostoevskij, personaggio emblematico e capostipite di una lunga tradizione letteraria. Lo stesso pensare, la stessa coscienza raffinata, in quanto coordinatrice di fatti lontani e irreperibili, è suscettibile di procurare come frutto immediato l'inerzia e l'apatia, lo stare inattivo e cosciente a braccia conserte in un guazzabuglio di dubbi, tormenti, agitazioni e sensazioni confuse. «Tutti gli uomini immediati e d'azione» si giustifica l'uomo del sottosuolo «se sono attivi è perché sono stupidi e limitati. Come si spiega ciò? Ecco come: essi, in conseguenza della loro limitatezza, scambiano per cause prime quelle più prossime e appena concomitanti, e in tal modo si convincono più presto e più facilmente degli altri d'aver trovato alla loro attività un sicuro fondamento, e così s'acquetano; e questo è l'importante. Giacché per cominciare ad agire occorre essere preliminarmente tranquilli, e che dubbi non ne rimangano punti. Be', e come farò per esempio io a essere tranquillo? dove le ho io le cause prime su cui poggiare, dove li ho i fondamenti? Dove li andrò a prendere? Io fo professione di pensiero, il che significa che per me ogni causa originaria se ne tira dietro un'altra ancora

più originaria, e così via all'infinito. Questo è appunto il succo d'ogni coscienza e d'ogni pensiero» (*Ricordi dal sottosuolo*, Firenze, 1964, pp. 26-27).

Alle folgoranti immagini letterarie di Musil o Dostoevskij non mancò di fare eco una consapevolezza scientifica e filosofica. Il linguaggio e le implicazioni mutano, ma la sostanza del discorso è simile se non identica.

Un essere determinato e finito, scrisse Hegel nella *Logica*, è in rapporto col mondo intero che lo circonda; sicché, come precisa anche P.K. Feyerabend nel suo *Contro il metodo*, la descrizione completa di un qualsiasi oggetto è autocontraddittoria.

In una pagina di *Science and Philosophy* A.N. Whitehead descrisse la correlazione tra finito e infinito in termini di complessità di un evento, lasciando intendere che non si può mai esaurire del tutto l'elenco dei collegamenti che vincolano necessariamente una qualsiasi entità alla totalità che la contiene. «L'opposizione tra finito ed infinito» egli scrive «deriva dalla verità metafisica fondamentale che ogni entità implica una serie indefinita di prospettive, ciascuna delle quali esprime una particolare caratteristica di quella entità. Ma ogni prospettiva finita non consente ad una entità di liberarsi dalle sue connessioni essenziali con la totalità: lo sfondo infinito rimane sempre come la causa non analizzata per cui quella prospettiva finita di quella entità ha il suo carattere particolare. Ogni analisi di una prospettiva limitata include sempre anche alcuni elementi dello sfondo. L'entità viene quindi esperita in una più ampia prospettiva finita, pur presupponendo lo sfondo inevitabile costituito dall'universo nella sua relazione con quell'entità».³

L'incolmabilità delle esperienze collegabili a un oggetto, che fanno di questo un punto limite non perfettamente calcolabile, colmo di sfumature e di aspetti non sempre riconoscibili, fa sì che qualsiasi pretesa di incidenza sulla realtà mediante azioni e interventi concreti sia di fatto vana, o perlomeno imprecisa e gravida di rischi. Ancora Musil si dilungherà a precisare questo concetto: a Diotima che gli rimprovera la sterilità della sua condotta Ulrich dovrà rispondere ricordando che il pensiero è costretto a costituirsi come entità autonoma, indipendente e distinto dalla vita e che «l'unico provvedimento accettabile consiste nel negare alla realtà la nostra partecipazione spirituale».⁴ S'intende che il successo dell'azione non è negato a priori, ma è pur sempre qualcosa che assomiglia in fondo al successo di un artista, qualcosa che «se la ride dei calcoli», e che è perciò, fa capire Musil, indissolubilmente legato all'irrazionale. È veramente notevole, in *Der Mann ohne Eigenschaften*, come l'insorgere di un'irrazionalità dilagante, dominata dall'idea di un falso infinito, sia vista nella prospettiva di un accordo segreto con l'imperativo dell'azione. Diotima ed Arnheim sono uno dei simboli dei poli di questo accordo.⁵

Ha tutto ciò un rapporto con la matematica? In realtà, proprio nella matematica troviamo spesso l'archetipo dei movimenti dello spirito e i problemi in essa dibattuti potrebbero, con altro nome, trovare una sorprendente corrispondenza con i fatti della vita. «Se si dicesse, invece di opinione scientifica, concetto della vita,» scrive Musil «invece di ipotesi, tentativo, e invece di verità, azione, l'opera di ogni buon fisico o matematico sopravvanzerebbe di molto, per coraggio e forza rivoluzionaria, i più grandi fatti della storia». ⁶ Così «nella scienza accade ogni due o tre anni che una cosa considerata fino allora un errore rovesci improvvisamente tutti i concetti, o che un'idea umile e disprezzata diventi regina di un nuovo mondo di idee, e tali avvenimenti non sono soltanto rivoluzionari ma conducono in alto come una scala celeste». «Nella matematica» scrive ancora Musil «abbiamo la nuova logica e lo spirito nella loro stessa essenza; in essa si trovano le scaturigini del tempo e le fonti di una portentosa trasformazione». ⁷

Per misurare la portata di queste parole sarebbe sufficiente riflettere, ad esempio, su ciò che rappresentò nella storia il calcolo differenziale di Leibniz; oppure su ciò che poteva giustificare il tono delle dichiarazioni con cui B. Russell decretò l'insufficienza dei metodi della filosofia tradizionale di fronte alle più recenti innovazioni matematiche.

La prospettiva aperta da T. Kuhn nel suo *The Structure of Scientific Revolutions* può aiutare a comprendere, se trasposta all'indagine matematica, la giusta dimensione di certi mutamenti. Ed è altresì chiaro che talune proposizioni innovatrici non sono di per sé dispensatrici di un nuovo sistema di regole caratterizzante il successivo paradigma scientifico. «L'esistenza di un paradigma» scrisse T. Kuhn «non implica necessariamente neppure l'esistenza di un qualsiasi insieme completo di regole». ⁸ Del resto «gli scienziati lavorano sulla base di modelli acquisiti attraverso l'educazione ed attraverso la conseguente assimilazione della letteratura scientifica, spesso senza minimamente conoscere, e senza trovarsi nella necessità di conoscere, quali caratteristiche hanno conferito a questi modelli lo *status* di paradigmi della comunità. E poiché questo è il loro abituale comportamento, essi non hanno bisogno di un insieme completo di regole». ⁹ E la concordanza delle ispirazioni matematiche con le norme accreditate dell'etica e del comportamento, e in breve dell'intera struttura grammaticale della vita, è in accordo col fatto che «gli scienziati non imparano mai concetti, leggi e teorie in astratto e per se stesse. Al contrario, questi strumenti intellettuali si manifestano fin dall'inizio come un complesso storicamente e pedagogicamente anteriore che li fa conoscere assieme e attraverso le loro applicazioni». ¹⁰ L'insegnamento di Wittgenstein sull'inevitabile ricondursi del paradigma matematico all'insieme sostanzialmente

indefinibile e privo di assoluto fondamento teorico delle leggi che governano l'esistenza e la prassi ordinaria, potrebbe applicarsi proprio al ribaltamento di prospettiva visibile nel confronto diretto tra Aristotele e Leibniz. Chi potrebbe negare che una certa concezione *matematica* dell'infinito sia il segnale di riconoscimento, per i Greci e per l'umanità post-rinascimentale, di una radicale distanza e incompatibilità di condizioni psicologiche, morali, e financo percettive?

È noto come Leibniz non cessò mai di legare le sue invenzioni matematiche al linguaggio con cui descrisse la sua visione del mondo. In svariati modi egli collegò sempre le anime ai punti matematici e per illustrare la struttura del reale usò immagini geometriche in cui il principio di continuità fosse una legge operante. Per lo meno entro i limiti dell'analogia il reale fu allora assimilato al continuo matematico e l'esistenza contingente, con la sua infinita complessità, paragonata all'insondabile irrazionalità dei punti dello spazio geometrico continuo. Conformemente all'idea intuitiva di continuità geometrica la natura «non fa salti» e, nel vuoto apparente tra due distinte sostanze, prevede l'esistenza possibile di un'infinità di altre sostanze intermedie, diverse tra loro per gradi infinitesimi.

Tutte le sostanze create furono così disposte in una serie continua in cui le realtà necessarie e quelle contingenti fossero nello stesso rapporto dei numeri razionali con i numeri irrazionali. La riducibilità dei razionali a una comune unità di misura era paragonabile alla possibilità di terminare l'analisi delle verità necessarie nelle verità identiche; l'infinità degli irrazionali era invece avvicinabile all'analisi del contingente che è fatalmente illimitata e senza soluzione: solo Dio può conoscere e portare a termine la completa spiegazione delle cause di un evento.

Se è vero, come sostenne A.N. Whitehead, che il continuo fornisce la principale modalità di rappresentazione della potenzialità indefinita, non si andrebbe lontani dalla verità configurandosi il mondo di Leibniz come dominato dall'illimitato, anche nel senso relativamente preciso che in esso risulta assente, come è pure assente nel corrispondente apparato matematico, l'idea del *limite* come elemento dominante un'infinità potenziale e situato *al di fuori* di quest'ultima. La realtà contingente è tutta costituita, in questa prospettiva, di punti raggiungibili per variazioni continue attraverso una problematica infinità attuale di condizioni intermedie e di percorsi infinitesimali dall'una all'altra. Solo Dio è all'esterno del mondo, trascendendo la serie illimitata delle monadi. In tal senso si può ben dire che il carattere rivoluzionario della matematica degli infinitesimi fu per lo meno analogo a quello di una concezione del mondo ispirata a quell'idea di infinito che Aristotele aveva respinto.

Un aspetto non riconducibile all'illimitato sopravvive in questa

visione: la diversità. Due punti qualsiasi della serie continua, se distinti, differiscono per qualche predicato che riveli la loro dissimiglianza, mentre due punti che abbiano gli stessi predicati, e siano perciò in tal senso indiscernibili, sono lo stesso punto. Con il principio degli indiscernibili Leibniz negò diritto d'esistenza alla duplicazione, al confronto speculare di due oggetti identici e distinti; circostanza che da sola paralizzerebbe il mondo, perché ogni movimento e ogni scelta sarebbero allora assurdi e contraddittori.

Ma una formulazione del principio degli indiscernibili richiede una comprensione preliminare di ciò cui esso implicitamente allude. Ogni qualvolta si parla di identità e si asserisce come nel principio in questione che due oggetti sono identici se e solo se hanno tutte le medesime proprietà, si rischia di coinvolgere entità inesistenti, o di cadere inconsapevoli nella circolarità dei paradossi logici o semantici.

B. Russell mise a nudo il tessuto logico degli argomenti di Leibniz, rivelandone ambiguità e contraddizioni, e dimostrando che solo i metodi della logica matematica erano adatti a riformulare correttamente il principio degli indiscernibili. La trattazione dell'argomento svolta da Whitehead e Russell nei *Principia mathematica* dimostrò da un lato che Leibniz non aveva ben compreso l'infinito di cui stava trattando a proposito degli indiscernibili e dall'altro che la matematica era in grado di affrontare i problemi della filosofia con insospettabili risorse di criteri e tecniche dimostrative. L'atteggiamento intellettuale rivelato da B. Russell soprattutto nelle esposizioni più divulgative dei contenuti dei *Principia*, oppure nei suoi excursus di storia della filosofia, dimostra come si fu inclini, per un certo periodo, a considerare la matematica una specie di strumento di conoscenza assoluta, capace di illustrare i più insondabili concetti, compreso quello di infinito, mediante catene deduttive provenienti da alcuni concetti logici elementari e difficilmente discutibili. Ma dell'infinito non poté certo essere offerta in tal modo una spiegazione 'scientifica' che indicasse in chiari termini ciò che esso è. Ne risultò piuttosto corroborato un certo atteggiamento agnostico, da cui traspariva però chiaro il suggerimento, se non l'intimazione, di non occuparsi della questione se non nei termini stabiliti nella nuova letteratura.

L'indagine logico-matematica raffinò in ogni caso la penetrazione dell'idea di infinito, non cessando d'altronde di indicare aspetti e sfumature non troppo dissimili da quelle di concezioni assai più antiche.

La teoria logica dei *tipi*, formulata la prima volta da B. Russell, fu un rimedio alla concezione ingenua dell'idea di «collezione» e ai paradossi che questa implicava. L'esistenza di questi paradossi fu imputata a un circolo vizioso implicato da certe particolari classi infinite di oggetti: alcune di queste classi dovevano

ritenersi logicamente «impossibili» semplicemente perché la loro definizione le presupponeva come entità già definite.

La costruzione logica dei *Principia* ridimensionò in un certo senso la disponibilità di un qualsiasi aggregato a formare una totalità di cui si potesse parlare sulla base di una cieca fiducia nella sua esistenza. W.V. Quine osservò giustamente che la principale finalità dei *Principia* fu di assottigliare l'universo delle classi a un punto di coerenza logica; e ciò avvenne con il sussidio di una gerarchia di tipi logici che impedisse troppo estesi raggruppamenti istantanei di oggetti. Whitehead e Russell scoprirono ad esempio che non è possibile considerare la totalità simultanea di un gruppo di individui assieme ai loro attributi e relazioni, agli attributi e relazioni di tali attributi e relazioni, e così indefinitamente. Questo «indefinitamente» è obbligato a disporsi in un crescente divenire di complessità, sì da ordinare l'universo in classi successive di significati logici percorrenti una gerarchia ben definita.

Fra le classi «inesistenti» ce n'è una che riguarda direttamente il principio degli indiscernibili e l'impossibilità di indicare correttamente tutte le infinite interrelazioni di un individuo con le cose dell'universo circostante. Una nozione come quella di «tutte le proprietà di un oggetto a » nel senso di «tutte le funzioni proposizionali che sono verificate dall'argomento a » è completamente illegittima e richiede anch'essa un ordinamento gerarchico di successive classi di attributi. Tra queste classi di attributi un posto di rilievo occupano i così detti «predicati» che indicano, per così dire, la collezione di proprietà «più vicine» all'individuo considerato nell'ordine gerarchico dei tipi. I predicati non esauriscono beninteso tutte le proprietà e chi volesse fondare un principio degli indiscernibili direttamente su *tutte* le proprietà di due oggetti x e y , per concludere che solo la loro completa uguaglianza consente di derivare l'identità $x = y$, si troverebbe di fronte un ostacolo insuperabile.

L'idea di identità richiede naturalmente una totalità senza compromessi perché tutti siamo inclini a pensare che x e y sono identici solo se *tutte* le interrelazioni di x e y con l'universo contenente sono senza eccezioni uguali fra loro. Ma Russell dimostrò che in questo senso totale l'identità è logicamente inesistente e indefinibile. In un significato più ristretto è invece possibile riformulare correttamente l'idea di Leibniz con il sussidio del così detto *assioma di riducibilità* che riconduce in un certo senso tecnicamente precisabile una qualsiasi funzione enunciativa ad una funzione predicativa; un ridimensionamento che rende possibile un'idea di identità così descrivibile: x e y sono identici se e solo se x e y hanno gli stessi predicati.

Ma l'assottigliamento dell'universo mostruosamente illimitato delle classi non fu l'unica conseguenza della scoperta dei paradossi o della diffidenza per l'illimitato. La stessa idea di

classe, come idea capace di radunare in un istante un'infinità di oggetti senza assoggettarla al divenire temporale del procedimento del contare, non fu assunta come necessario elemento logico irriducibile. «I simboli per le classi, come quelli per le descrizioni» scrivono Whitehead e Russell «sono, nel nostro sistema, simboli incompleti: è il loro *uso* ad essere definito, e si assume che essi stessi non abbiano alcun significato... Perciò le classi, così come noi le introduciamo, sono puri simboli o convenienze linguistiche e non oggetti autentici come i loro componenti, nel caso questi siano individui». ¹¹

Una circostanza suggestiva che avvalorava questa idea è la possibile visualizzazione, prospettata nei *Principia*, della classe come «substrato di tutte le asserzioni equivalenti intorno a varie funzioni formalmente equivalenti». ¹² Una classe assomiglia cioè a quella cosa che non è necessario pensare come esistente, ma è in qualche modo determinata da tutte le funzioni proposizionali che risultano verificate per gli stessi argomenti, e che per questo motivo la designano; una di quelle ipostasi che la nostra immaginazione non può fare a meno di introdurre e accreditare.

Ma la drastica riduzione operata nei *Principia* delle formule linguistiche compatibili non incontrò un'universale e definitiva approvazione. È fuori discussione che un nuovo paradigma della ricerca impose da allora un netto ridimensionamento delle implicazioni ontologiche del linguaggio, e la *teoria delle descrizioni* di Russell fu un primo importante rimedio all'eliminazione di pseudo-problemi di esistenza. Tuttavia la soppressione delle classi non toccò il fondo del problema. Russell dovette scontare l'alleggerimento di questa eliminazione facendo appello ad altre entità universali, cioè le funzioni proposizionali o gli attributi, e si attirò così la critica di Quine che considerò oziosa, nella sostanza, questa sorta di riduzione. La perplessità di Quine fu anche diretta alla stratificazione dei tipi, considerata per taluni aspetti innaturale e portatrice di corollari chiaramente indesiderabili.

Nei successivi sistemi assiomatici di Zermelo, von Neumann, Gödel-Bernays, la diffidenza per l'idea di *classe* apparve in forma più sfumata. Il sistema di Zermelo asserisce in definitiva l'*esistenza* di certi insiemi, anche se l'approccio 'costruttivista' adombrato nella teoria presenta aspetti anche arbitrariamente limitativi e tali da escludere, per evitare le antinomie, insiemi perfettamente inoffensivi e legittimi. Von Neumann ebbe l'idea di togliere di mezzo il sospetto che la nozione di classe *in sé* fosse origine di contraddizioni; piuttosto, egli suggerì, è l'uso che si fa di alcune classi come *elementi* di altre classi che genera l'incompatibilità logica. Se alcuni assiomi di Zermelo si mossero nell'ambito di una costruibilità di insiemi, mediante l'enunciazione di predicati ben posti, *all'interno* di raggruppamenti di già collaudata legittimità, von Neumann

reintrodusse alcune delle classi più 'pericolose' definibili non come sottoinsiemi di qualcos'altro ma direttamente, per così dire, mediante predicati estendibili all'intero universo. Tale la *classe universale*, già implicata in talune delle principali antinomie, corrispondente al predicato « $x = x$ », il cui carattere finale e conclusivo si sarebbe espresso, nelle intenzioni di von Neumann, nella proibizione di essere a sua volta *elemento* di una qualsivoglia collezione di oggetti.¹³

L'impostazione di von Neumann fu anche quella di Gödel-Bernays. Nel sistema assiomatico di Gödel-Bernays si distingue tra *insieme* e *classe* per il fatto che a un insieme è consentito di essere elemento di una classe, mentre la classe non è elemento di alcunché. L'esistenza delle classi è enunciata nel modo più esplicito da Bernays in un teorema metamatematico dimostrabile in base ai primi assiomi di estensionalità e di costruibilità elementare degli insiemi e delle classi, e prevede una definibilità di raggruppamenti di oggetti mediante predicati del tipo più generale, stabilendo così una precisa corrispondenza tra classi e predicati.¹⁴ Nel loro *Algebra* (New York, 1967) S. Mac Lane e G. Birkhoff fecero proprio del sistema di assiomi di Bernays il fondamento teorico della teoria algebrica delle *categorie*, ove risultano implicate classi di oggetti caratterizzate da un alto grado di astrazione e di *estensione*.

Questa possibilità di estendere e di allargare indefinitamente il campo d'azione della matematica fino a livelli di generalità arbitrariamente grandi, rinserrendo però nel contempo il discorso algebrico entro limiti ben definiti al riparo dalle antinomie, è ben rappresentata dalla nozione di *Universo* (o anche di *Universo inaccessibile*). Le difficoltà logiche che possono insorgere dal comporre nuove categorie sulla base di dati insiemi iniziali sono scongiurate dalla definibilità, volta per volta, di un insieme 'contenitore' (che è appunto l'*Universo*) da cui non è possibile 'uscire' operando le costruzioni previste dagli assiomi di Bernays. Si potrebbe pensare allora a una nuova approssimazione dell'assoluto, riproducendo in ogni suo passo i caratteri di quell'infinito attuale che Cantor aveva creduto di scorgere in altre entità matematiche, ma svolgentesi pur sempre, tuttavia, nell'ambito di un'infinità puramente potenziale.

Le successive ispezioni dell'idea di classe o di raggruppamento che si avvicendarono nella prima metà del '900 suggeriscono piuttosto come eventuali problemi di compatibilità fossero da riportare sul terreno semantico, e richiedessero perciò un attento riesame dell'uso della *lingua*. Esempio fu allora il ripensamento suscitato dai celebri risultati di Löwenheim e di Skolem. Löwenheim dimostrò nel 1915 che ogni insieme finito di formule (opportunamente definite) del calcolo dei predicati del primo ordine che avesse un modello infinito doveva allora sempre possedere un modello al più numerabile. Nel 1920 Skolem estese

questo risultato agli insiemi *infiniti* (numerabili) di formule, liberando successivamente la dimostrazione dal peso dell'assioma della scelta e mettendo allo scoperto una intrinseca riferibilità di questi teoremi ai risultati di Gödel sulla completezza del calcolo dei predicati del prim'ordine. Ciò voleva dire, in breve, che l'interpretabilità di un sistema di assiomi, come ad esempio quello di von Neumann o di Zermelo-Fraenkel poteva sempre limitarsi a un dominio *numerabile* di oggetti che li verificassero. Ma la difficoltà sorgeva non appena si tenesse conto del teorema di Cantor sulla non numerabilità dell'insieme *potenza* dei numeri naturali (l'insieme, cioè, di tutti i sottoinsiemi di questi numeri). Il teorema risultava perfettamente dimostrabile in quel sistema, e sembrava nel contempo indicare degli insiemi i cui elementi non si potevano in nessun modo *contare*, uno per uno, ponendoli in corrispondenza biunivoca con la successione 1,2,3,... dei numeri naturali. Come potevano rientrare questi insiemi in un modello puramente numerabile del sistema? Questo paradosso, noto come *paradosso di Skolem*, poteva ben suscitare una rinnovata diffidenza per l'infinito, specialmente ove questo varcasse i confini della mera numerabilità. Un'interpretazione suggerita da Skolem, e riassunta poi da Bernays, portava alla conclusione che «in realtà è tutto numerabile e le differenze di potenza sussistono di volta in volta, per così dire, solo apparentemente, relativamente a un quadro concettuale».¹⁵ La soluzione proposta da Skolem imponeva di considerare il teorema di Cantor come una affermazione di *non esistenza* di un insieme particolare: quello cioè «rappresentante» la corrispondenza biunivoca (per l'appunto inesistente) tra l'insieme dei naturali e il suo insieme potenza, e formato dalle coppie ordinate di elementi del primo e del secondo insieme. Ma questa inesistenza non era *assoluta*; essa era limitata all'ambito dei possibili modelli della teoria degli insiemi derivabile da un consistente gruppo di assiomi, e *al di fuori* di questa teoria, cioè in un metalinguaggio, era prospettabile una numerabilità del continuo.¹⁶ Un insieme, era questa la conclusione, era suscettibile di esistere o non esistere in dipendenza dalla prospettiva linguistica da cui risultasse contemplato.

In *Questioni di filosofia della matematica* E. Casari, sulla traccia di una osservazione di Bernays, e di alcuni lavori di A. Mostowski, vede come nocciolo di queste vicende l'intrinseca fallibilità e imprecisione dello strumento assiomatico come sistema descrittivo, un'imperfezione insanabile della lingua formalizzata secondo gli usuali schemi dell'assiomatica. L'osservazione di Borei sull'esistenza di una componente *indefinita* del continuo denunciata dal teorema di Cantor, trova forse in questa lacuna linguistica il suo più esatto significato; e così pure, forse, la questione più ampia dell'esistenza di

determinate classi infinite. Il così detto *relativismo* di Skolem, conseguenza immancabile del paradosso, toglie alla classe il suo carattere per così dire *assoluto*; i segni o le parole che la rappresentano appartengono a un testo in parte illusorio che avrebbe fornito un esemplare paradigma per quell'imprecisato momento della storia in cui si presume che l'identità di segno rappresentante e cosa rappresentata sia svanita nell'inganno.

1. R. Musil, *op. cit.*, p. 690.

2. *Ibidem*, p. 231.

3. *Scienza e filosofia*, trad. it. Milano, 1966, p. 88.

4. R. Musil, *op. cit.*, p. 264.

5. Questo punto di vista trova l'esatto riscontro nel ventinovesimo enunciato del *Tao tê ching*: «Coloro che vogliono impadronirsi dell'impero con l'azione ho visto che sono caduti nell'imbarazzo. Non si può foggiare il vaso spirituale dell'impero. Chiunque lo foggia, lo rovina, chiunque lo trattenga, lo perde». Il riferimento di ogni agire dovrebbe allora risiedere in quell'invisibile centro di oscillazione provocata dall'inevitabile avvicinarsi del più e del meno, del limite e dell'illimitato: «Perché gli esseri sono ora avanti, ora indietro; ora respirano piano, ora ansimano con violenza; ora sono forti, ora sono preoccupati; ora cominciano, ora decadono», trad. it. Milano, 1973, p. 83.

6. R. Musil, *op. cit.*, p. 36.

7. *Ibidem*, p. 34.

8. Cfr. T. Kuhn, *op. cit.*, p. 66.

9. *Ibidem*, p. 68.

10. *Ibidem*, p. 69.

11. *Principia mathematica*, Introd., III (Ed. to * 56, Cambridge University Press, 1973, p. 72).

12. *Ibidem*, p. 74.

13. Cfr. A.A. Fraenkel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, 1958, p. 97.

14. Cfr. P. Bernays, *A System of Axiomatic Set Theory*, Parte I, in «J. Symbolic Logic», 2, 1937, pp. 65-77.

15. Citato da E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, 1976, p. 124.

16. Cfr. R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, New York, 1937.

XI

L'INFINITO ATTUALE. INDEFINITO E TRANSFINITO

In che modo si formò col tempo la più recente convinzione che l'infinito possa esistere come totalità attuale? Un elenco dei precursori sarebbe interminabile: retrocedendo nei secoli si arriverebbe, si è visto, a J. Mair, Gregorio da Rimini, Duns Scoto; più recentemente, in una descrizione dell'infinito contenuta nella *XII Lettera* di Spinoza, e nel successivo commento della *Scienza della logica* di Hegel, si troverebbe la più compiuta espressione di una possibile alternativa all'illimitato inteso come pura potenza.

L'esposizione di Spinoza e quella di Hegel già affermano quell'esigenza di staticità che deve soddisfare l'infinito per cessare di esistere come puro sinonimo del divenire temporale. Forse Leibniz, pur credendo nell'infinito attuale, non aveva altrettanto insistito su questo punto. È pur vero che l'infinito potenziale trova nelle serie una naturale conclusione nel finito e quindi in qualcosa di fermo e statico; ma l'insistenza di Leibniz è tutta sul movimento, sull'istante della sua germinazione: il differenziale, commentò G. Milhaud, non è altro che il «momento infinitesimale di ogni divenire»,¹ e il finito è l'atto finale di una generazione dinamica dominata dal tempo. Così l'uguaglianza finale raggiunta dalle serie a segni alterni di cui le somme parziali siano una volta maggiori e una volta minori della somma conclusiva, è per Leibniz un'entità dinamica colta nell'infinitesimo del trapasso dal moto alla quiete. Fermat coniò un nuovo termine per definirla: *adégalité* invece di *égalité*. L'uguaglianza può infatti essere considerata come una disuguaglianza molto piccola, e si può avvicinare l'una all'altra quanto si vuole.²

Per rintracciare poi un'idea dell'infinito suscettibile di tramutarsi in nozione mentalmente accessibile e adatta a ricevere un nome o una designazione simbolica come ogni altra cosa di questo mondo, non è inutile risalire nuovamente a Cartesio. Già Cartesio, infatti, aveva ottimisticamente asserito che la concezione dell'infinito non è dissimile a quella di una figura finita: allo stesso modo che una figura composta da tre linee genera l'idea del triangolo, così è sufficiente concepire una cosa che non è rinserrata da alcun limite per possedere un'idea

vera e completa di tutto l'infinito.³

In realtà Cartesio non arrivava ad ammettere la possibilità di 'comprendere' l'infinito tutto intero; piuttosto questa stessa impossibilità doveva appartenere alla ragione formale dell'infinito ed essere implicita nella verità dell'idea che di essa ci si potesse formare. Se concepiamo 'qualcosa' non possiamo perciò concepire l'infinito, perché l'infinito trascende qualsiasi 'cosa' concepita; nondimeno di ciò siamo consapevoli, e tale consapevolezza rivela l'esistenza e la verità dell'idea. Con ciò Cartesio aveva comunque proposto un infinito garantito da un legittimo contenuto di obiettività, pur non ritenendolo riferibile ad alcuna cosa concreta.

Queste osservazioni apparentemente innocue sull'accessibilità dell'infinito, per lo meno come idea esprimibile in un insieme ordinato di parole e di frasi, erano in realtà l'avvertimento che anche l'infinito, come una qualsiasi altra cosa, poteva diventare l'oggetto di una invenzione meccanica, il segno illimitatamente riproducibile di un'arte che Leibniz avrebbe definito praticabile senza lo sforzo dell'immaginazione. Cartesio era ben consapevole della necessità di mantenere intero nello spirito tutto il senso di una qualsiasi definizione, in ogni occasione questa dovesse adattarsi ad una circostanza applicativa. Ma è chiaro che il rischio della comprensione di un oggetto è pur sempre una sorta di dissipazione, un'espansione illimitata di una molteplicità di esemplificazioni governate da leggi non più necessariamente pensate «ab initio». Fu certamente anche per questo motivo che i Pitagorici cacciarono dalla loro scuola colui che osò per primo divulgare il mistero dell'incommensurabilità, l'ἄλογος per eccellenza.

Nel corso del XVIII secolo i discepoli di Leibniz ebbero il compito di espandere e di consolidare il disegno iniziale della dottrina leibniziana, e ciò non avvenne senza esclamazioni trionfistiche e posizioni ispirate al più rigido dogmatismo. Nonostante le cautele di Leibniz che aveva conservato il titolo di «finzioni» ai differenziali, Fontenelle scriveva nel 1727, nella prefazione agli *Éléments de la géométrie de l'infini*, che gli infiniti e gli infinitesimi dovevano ormai considerarsi un fatto stabilito per sempre, un'acquisizione scontata delle speculazioni della Geometria. Restava immutata la concessione cartesiana dell'inesistenza dell'illimitato come totalità riscontrabile nel reale, pur essendo tuttavia la realtà dell'infinito imperativamente trasposta nella finzione matematica: «La Geometria è tutta intellettuale, indipendente dalla descrizione attuale e dall'esistenza delle Figure di cui scopre le proprietà. Tutto ciò che essa concepisce come necessario è reale della realtà che essa suppone nel suo oggetto. L'Infinito che essa dimostra è dunque tanto reale quanto il finito, e l'idea che essa ne ha è, niente più di ogni altra, il frutto di una supposizione che esso non

sia altro che utile, e che debba sparire non appena se ne sia fatto uso». ⁴

Le interminabili discussioni che si svolsero nel '700 sui fondamenti metafisici del differenziale e del principio di continuità non alterarono in ogni caso la convinzione che una plausibile idea dell'infinito dovesse in qualche modo affermarsi e consolidarsi nel linguaggio matematico. L'infinitesimo non si era certo prestato ad una fondazione logica inattaccabile, ma sul piano della pratica esso suggeriva l'idea di un'indubbia solidità. Non stupisce perciò di trovare infine rafforzata la convinzione dell'esistenza dell'infinito, almeno come realtà intellettuale, in colui che fu spesso considerato il più diretto precursore dell'opera di Cantor: Bernhard Bolzano.

Nella prima metà dell'800 B. Bolzano raggiunse conclusioni non troppo dissimili da quelle già avanzate da Cartesio, azzardando però nel contempo tesi decisamente più ardite. Egli cominciò a scrivere nella sua *Wissenschaftslehre* (§§ 48-49) che le idee non sono in generale qualcosa di «esistente», ma semplicemente «qualcosa» che non cessa di sussistere anche quando non sono pensate da nessuno. Vi sono anche idee cui spetta il titolo di «idee oggettive», perché dotate di una loro chiara inequivocabilità, cui non corrisponde tuttavia alcun oggetto concretamente esistente. Tali sono l'idea di «nulla», oppure « $\sqrt{-1}$ », oppure lo «0». Bolzano concluse che la determinazione di una cosa qualsiasi non dovesse poggiare necessariamente sull'effettiva esistenza di un oggetto. E l'infinito non poteva fare eccezione: è vero che un insieme infinito non è determinabile come descrizione esauriente degli elementi che gli appartengono, ma nondimeno esistono metodi che consentono di definirlo senza ambiguità.

Ma Bolzano non si accontentò di riconoscere nell'idea di infinito un'oggettività correttamente determinabile. Non diversamente da Leibniz egli vide l'infinito ovunque operante nella realtà; collegò l'infinità di Dio all'infinità degli esseri creati e all'infinità delle esperienze collegate, anche in un tempo brevissimo, a ciascuno di questi esseri (*Paradoxien des Unendlichen*, § 25). Nelle *Paradoxien des Unendlichen* si affacciò perfino la tesi, quanto meno ardita e dubitabile, che l'infinità di Dio non può essere fondata che sulla molteplicità; cominciò anche di qui ad essere pressoché sottinteso che i legittimi depositari di ogni chiara interpretazione del concetto di molteplicità infinita sarebbero divenuti i matematici.

Una decisiva innovazione di Bolzano, che superò in questo perfino Cantor rapportandosi direttamente allo stile d'indagine della prima metà del '900, fu l'abbozzo di una logica delle proposizioni capace di ridimensionare i problemi di *esistenza*: quasi un'anticipazione degli effetti prodotti dalle *descrizioni* di Russell, o degli sforzi di Quine di ridurre al minimo gli impegni

ontologici del linguaggio. Nella *Wissenschaftslehre* (§ 142) Bolzano fa chiaramente intendere di voler distinguere tra diversi tipi di proposizioni esistenziali: dire «A esiste» non è lo stesso che dire «c'è un A», perché nella prima proposizione l'esistenza appare come predicato e nella seconda no. La formula «c'è un A» allude semplicemente al fatto che l'*idea* «A» è referenziale, e questo consente un uso del verbo essere al riparo da inopportune compromissioni sul piano dell'ontologia. Così la proposizione «c'è una legge morale suprema» non significa che esiste per davvero qualcosa che è una legge morale suprema (*Ibidem*, § 137). E l'equivoco non sta solamente nella forma proposizionale, ma nell'intrinseca problematicità di idee quali «la suprema legge morale», che si riferiscono a qualcosa che non esiste anche se è pur sempre un «qualcosa». Non è assurdo pensare al contenuto referenziale di un'idea in rapporto a un non esistente. Basti pensare che l'idea di «proposizione» può riferirsi a oggetti quali il teorema di Pitagora o il teorema del parallelogramma delle forze che viste come *proposizioni in sé*, senza dover supporre che qualcuno le pensi o scriva in un dato istante, non esistono come realtà attuali (*Ibidem*, § 49). La *verità* di simili proposizioni non è nel loro riferirsi a oggetti concreti che si comportano «in realtà» come esse li descrivono: la formula tomista *Veruni et ens convertuntur* dà luogo ad equivoci quando sono in gioco delle idee oggettive il cui riferimento è privo di esistenza spaziotemporale e che tuttavia entrano in qualche relazione con il verbo *essere*. Quando diciamo che una verità dice come le cose stanno *realmente*, scrive Bolzano (*Ibidem*, § 25), dobbiamo riconoscere di parlare in senso figurato, perché accade spesso che né l'essere (Sein), né la presenza attuale (Dasein), né l'esistenza (Existenz), né l'attualità (Wirklichkeit) spettano alla proposizione che la descrive o alle cose cui essa si riferisce. Una formula linguistica come «c'è un A», in cui l'esistenza non è un predicato esplicito, può allora sussistere al di là di ogni impegno ontologico e assumere un senso non lontano da quello indotto dai quantificatori esistenziali nell'ordinaria logica dei predicati.

Per quanto Bolzano insistesse nell'inserire l'infinito tra le cose *reali* (*Paradoxien*, § 25), egli preparò il terreno all'avvento di un uso *innocuo* del verbo essere in riferimento agli universali e alle finzioni. Egli neutralizzò, per così dire, la potenza evocatrice del segno, prospettando la sua riducibilità a *fiche* manovrabile nello spirito del più radicale nominalismo. L'infinito avrebbe potuto in tal modo apparire nel linguaggio senza troppe compromissioni, più soggetto alle esigenze di un atteggiamento pragmatico che ai suggerimenti di qualche suggestione metafisica. Una delle più peculiari caratteristiche del simbolismo tradizionale sarebbe così andata dispersa. Novalis⁵ aveva ancora scritto mezzo secolo prima di Bolzano che ogni parola è un'evocazione e lo spirito evocato ogni volta *appare*; e questo succede in virtù del nesso

intimo che governa la generale simpatia dell'universo, e che si esprime nel modo più puro nel segno matematico. Con ciò si postulava implicitamente un regno di corrispondenze sul piano dell'invisibile, pronto a manifestarsi, talvolta ancora confuso di invisibilità, nella tessitura delle più sottili analogie, sensazioni, emozioni e conseguenze più o meno riconoscibili evocate dal segno. L'innovazione di Bolzano ben si potrebbe definire, allora, un esorcismo contro gli spettri chiamati dal simbolo, una specie di lubrificazione del pensiero logico operata con la soppressione di alcune delle componenti *invisibili* della proposizione o dell'idea. Il confronto Novalis-Bolzano è ovviamente uno dei tanti possibili; tuttavia esso prospetta in tempi decisamente ravvicinati la più tipica opposizione nella storia del rapporto tra essere e segno. Cassirer, nel primo volume della sua *Philosophie der Symbolischen Formen* vede il momento iniziale dell'identità tra essere e parola nei passi del *Rigveda*: risalire fino all'immagine più perfetta di questo librarsi della parola sui piani dell'essere invisibile significa ripensare al *Vāc* indù, che nella *Bṛhad-āraṇyaka-upaniṣad* si accoppia con la Morte-Fame per generare tutto quello che esiste. Anche negli aforismi di Eraclito e nel *Cratilo* di Platone si hanno due tra i più rimarcabili esempi della corrispondenza tra il nome e la cosa: il *λόγος* dei Greci è l'analogo del *Vāc* indù, e nella sua profonda complessità esso racchiude questa corrispondenza significante-significato nel suo duplice aspetto di rivelazione e velame, di allusione concreta e di verità nascosta o illusoria. Negli enunciati di Novalis si rinnova questa prospettiva; ma né Novalis né altri moderni come Vico o J.G. Hamann, che riprese la visione eraclitea, impedirono il collasso dell'unità totale di essere e linguaggio, implicito nell'immagine mitica del mondo, che cominciò a delinarsi dopo il Rinascimento.

Nel suo *Les mots et les choses* Michel Foucault traccia le linee essenziali dell'evoluzione del simbolo a partire dal XVI secolo. Egli suggerisce che uno dei primi capovolgimenti della visione cinquecentesca di un mondo solcato da un'innunerevole moltitudine di segni corrispondenti nell'*analogia*, nella *simpatia*, nell'*aemulatio* e nella *convenientia*, si debba rinvenire nel delinarsi, specie nella *Logica di Port-Royal*, di un'organizzazione del simbolo puramente *binaria*. Nel Sei e Settecento si profila pian piano l'offuscamento della *somiglianza* come terzo elemento di raccordo dei segni congiunti dall'analogia e come principio dell'ampliamento indefinito delle corrispondenze, e ogni simbolo rimane solo al confronto con il proprio significato, nello spazio ristretto del suo esclusivo contenuto referenziale o semantico. Su questa specie di corto circuito del simbolo estratto nella sua nuda funzione di rapporto binario significante-significato sarebbe fiorita ogni successiva teoria epistemica come studio della *rappresentazione*, con l'empirismo e l'ideologia, con le indagini di

Locke, Hume, Berkeley, Destutt de Tracy, Condillac. La teoria della conoscenza come elaborazione di un sistema totale di segni si sarebbe configurata quale analisi generale di ogni forma di pensiero attraverso le idee ricavate dal senso e dall'attività di astrazione, sostenendo il duplice sviluppo di una scienza della natura di tono semidogmatico e di una filosofia della rappresentazione destinata a diventare sempre più scettica e nominalista. Bolzano viene dopo Locke, Hume, Hobbes, Condillac, ma aggiunge quella che si potrebbe definire una singolare sintesi e mistione tra realismo platonico (ma il termine, pur in uso, è inadeguato) e 'devitalizzazione' dell'idea, finalmente incastonata in un universo di segni sempre più rassomigliante ad un sistema formalizzato, ad una lingua che analizzi, scomponga e riunifichi nello spirito di un gioco combinatorio indipendente dall'essere.

L'esistenza 'reale' delle proposizioni e delle idee fu da Bolzano drasticamente ridotta al loro eventuale apparire in qualche punto dello spazio-tempo, al loro essere pensate o pronunciate da qualcuno in un determinato istante, senza alcun riguardo, ovviamente, alla possibilità di 'materializzarsi', in quell'istante, di uno spirito preesistente. Ed è questo uno dei punti essenziali. La sfera del magico che Novalis era stato tra gli ultimi a rivendicare perfino ai segni della matematica, ed anzi ad essi soprattutto, rimase da allora tacitamente occultata. Lo stesso Novalis aveva scritto che all'invisibile, assai più che al visibile, l'uomo è strettamente legato; e lo voglia o no, è proprio ciò che si potrebbe squalificare, per ingenuità o per inconscia intenzione esorcistica, come «inesistente» a coordinare gli eventi.

Il gesto riduttivo di Bolzano si potrebbe anche spiegare citando le sue speculazioni sul concetto di verità. Per evitare fraintendimenti, egli spiega nella *Wissenschaftslehre* (§ 30), il verbo *essere* che si usa parlando di *verità in sé* ha un senso del tutto convenzionale; esso va separato dall'idea di attualità, di presenza operativa e condizionante i fatti della vita. Le verità della religione, della morale, della matematica e della metafisica sono solo proposizioni o idee da considerare in prima istanza come cosa in sé, distinte dal *fatto* che descrivono, che per lo più «non esiste». Le «proposizioni vere» rassomigliano alle finzioni del geometra e trovano perciò il loro carattere di 'verità' in una loro intima legge di composizione ancor prima che nella eventuale rassomiglianza coi fatti (*Ibidem*, §§ 24, 25). Su questo terreno per così dire neutrale e sgombro di pseudoproblemi un infinito finalmente 'devitalizzato' ed estratto come nudo concetto da ogni insieme di possibili corrispondenze avrebbe ben potuto trovare un ambiente rassicurante per sopravvivere come segno intelligibile del pensiero 'razionale'. La sua potenza evocatrice era già pressoché squalificata come gioco di fantasmi, come mera stupidità metafisica, e in questa fase culminante della

catastrofica evoluzione del simbolo il linguaggio era forse per la prima volta messo completamente al riparo dall'invasione dell'essere.

Ma ciò che si vuol dire con questo è solo che lo spessore simbolico del segno, insieme alla rete di corrispondenze sui vari piani dell'essere, era già definitivamente trasposto allo spazio scisso e separato della sfera *poetica*, e al linguaggio della scienza era rimasto un mero sistema di rigidi rapporti di similitudine privato del contrassegno di un Testo unico e primitivo ove fosse descritta l'infinita somiglianza delle cose; e senza alcun rapporto, ormai, con quella scrittura prima e invisibile, cui fa cenno ancora Foucault, rispetto alla quale ogni linguaggio immaginabile era ancora considerato, nel XVI secolo, un mero commento.

Bolzano avanzò la proposta che una classe di oggetti fosse definibile come tale a prescindere dal suo essere finita o infinita. Egli anticipò Cantor nel ritenere che all'idea di insieme toccasse una verifica di coerenza mediante il principio aristotelico del terzo escluso. Una cosa è determinata o determinabile se di due attributi contraddittori (*b* e non-*b*) uno solo appartiene ad essa;⁶ e la regola si applica bene al finito come all'infinito: anche se è infinito, un insieme risulta determinabile per la circostanza che in linea di principio ogni suo elemento possiede o non possiede una specifica proprietà. Come più tardi Cantor, Bolzano affidò la sua fede nell'esistenza dell'infinito attuale alla convinzione che l'atto mentale capace di riunire in una superiore unità oggetti separati e distinti fosse così al riparo da contraddizioni logiche.

I fatti avrebbero smentito più in là questa convinzione, determinando infine una vera rinuncia ad ogni tentativo di fornire una definizione generale e diretta del concetto di insieme. In ogni caso le idee di Bolzano precorsero di qualche decennio un intero periodo dell'800 che fu caratterizzato dall'invenzione di un linguaggio matematico che dell'infinito intese formare una totalità attuale e statica, non governata dal divenire temporale. Questo fu il linguaggio della teoria degli insiemi che intese giustificare, accanto all'infinito potenziale o sincategorematico delle successioni infinite, l'infinità attuale di tutti i sottoinsiemi di tali successioni come collezione chiusa di oggetti esistenti di per se stessi.⁷

Bolzano anticipò questo sviluppo dimostrando che gli aggregati si formano mediante operazioni sintetiche del pensiero al di fuori del tempo: parlando dell'insieme degli abitanti di Pechino si individua un insieme ben definito senza essere costretti a enumerare uno per uno, separatamente, tutti i suoi componenti; e analogamente i termini di una serie infinita sono tutti individuabili dalla legge di formazione della serie stessa, che rende superflua l'enumerazione dei suoi termini: è la legge ad individuare la serie, e non «tutti» i termini contati uno per uno.

Il metodo ε - δ di Weierstrass riflette la stessa esigenza di

staticità. Se si afferma che una funzione $f(x)$ è continua in un punto $x = a$, si intende che $f(x)$ converge a $f(a)$ quando x si avvicina indefinitamente ad a . Ma questa convergenza, che suggerisce l'idea del divenire e della potenzialità, può anche descriversi in questi termini: per *ogni* quantità ε positiva *esiste* una corrispondente quantità δ positiva tale che, per *tutti* i numeri reali x che si trovano in un intorno di a di raggio δ , il valore $f(x)$ si trova in un intorno di $f(a)$ di raggio ε (cioè $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$). I termini chiave della definizione: *ogni*, *esiste*, *tutti* suggeriscono totalità infinite e statiche,⁸ logicamente antecedenti alla scelta effettiva dei punti in esse contenuti, e non dipendenti dal loro eventuale disporsi, secondo una qualsiasi legge matematica, in qualche successione potenzialmente infinita e quindi soggetta all'inesauribilità del divenire temporale.

Fu ancora Weierstrass a fondare per la prima volta una teoria dei numeri irrazionali sulla nozione di insieme, estendendo operazioni e relazioni di grandezza ad aggregati infiniti di numeri razionali: l'intera aritmetica dei reali era così suscettibile di una descrizione insiemistica; l'infinità potenziale dello sviluppo di cifre dei numeri irrazionali era rinserrata in un'entità attuale governata da leggi indipendenti da ogni idea di successione temporale.

Cantor avrebbe in seguito toccato in modo esplicito il punto essenziale: era l'idea di tempo ad essere principalmente coinvolta in questa prospettiva. La convinzione che l'apriorismo kantiano fosse inattaccabile per lo meno nell'idea del tempo (l'apriorismo dello spazio non resistette all'invenzione delle geometrie non-euclidee) ricevette nel modo più esplicito una categorica smentita. Così, a proposito del rapporto tra continuità e tempo, Cantor stabilì la netta priorità dell'idea del continuo. «Debbo dichiarare innanzitutto» egli scrisse «che a mio avviso l'introduzione della nozione di tempo o dell'idea di tempo non deve servire a spiegare la nozione molto più primitiva e generale del continuo; il tempo, a mio avviso, è un'idea che presuppone, per essere chiaramente spiegata, la nozione di continuità, indipendente da quella del tempo, e che anche con tale nozione di continuità non può essere concepito né oggettivamente come sostanza né soggettivamente come un'idea necessaria a priori; quest'idea di tempo non è che un'idea ausiliaria e relativa, utile a stabilire il rapporto tra i diversi movimenti che hanno luogo nella natura e che noi percepiamo. Così nulla si presenta mai nella natura che assomigli al tempo oggettivo o assoluto, e di conseguenza non si può assumere il tempo come misura del movimento, ma al contrario si potrebbe considerare il movimento come misura del tempo, se non si fosse impediti dal fatto di non aver guadagnato nulla a considerare il tempo come un'idea soggettiva necessaria a priori».⁹

La crisi dell'apriorismo kantiano che risulta delineata in queste parole giocò un ruolo decisivo nella matematica dell'ultimo '800, soprattutto se si considera che fu proprio lo svolgersi di un'aritmetica e di una geometria fuori dal tempo a consentire una definizione dell'infinito in termini statici, suscettibile di tramutarsi infine in una fondazione matematica dell'infinità attuale.

E. Cassirer osservò come la matematica dell'Ottocento vide un progressivo offuscarsi del valore cognitivo delle forme dell'intuizione sensibile. Insieme a Cantor anche Dedekind, Russell, Frege e Hilbert cercarono di ridurre i fondamenti del numero a costanti logiche o relazioni primarie e autonome del pensiero.

Dedekind pensava che anche la continuità dello spazio potesse derivare proprio da queste costanti e il processo di aritmetizzazione della matematica cui egli contribuì con lavori decisivi aveva il suo fulcro in quell'idea di numero che Frege aveva considerato come proprietà di un *concetto puro*, e non di una cosa sensibile. «La serie dei numeri» scrive Cassirer riepilogando questo punto di vista «non deve essere costruita sull'intuizione dello spazio e del tempo, ma invece il concetto di numero, come “emanazione diretta delle pure leggi del pensiero”, ci deve mettere per la prima volta in grado di acquisire concetti davvero rigorosi ed esatti di ciò che è spaziale e temporale».¹⁰

Volendo fin d'ora trovare l'esatta antitesi di questa prospettiva non sarebbe inutile retrocedere fino ad una delle ultime testimonianze della concezione arcaica del numero, quella ad esempio di Simplicio: «Il tempo è il numero di un certo movimento o meglio ancora, più generalmente, è l'intervallo proprio alla natura dell'Universo».¹¹

E nulla potrebbe introdurre meglio di questo enunciato, e di tutto ciò che esso sottintende, gli argomenti usati da G. de Santillana in *Hamlet's Mill* per dimostrare l'esistenza di un'unione inscindibile, nel pensiero arcaico, tra *numero* e *tempo*.

Simili accostamenti sono stridenti e disorientanti, ma hanno anche il pregio di fornire un angolo visuale rispetto al quale viene meno una parte dell'evidenza del criterio di verità cui le parole di Cantor sembrano ispirate. Poincaré, Brouwer e H. Weyl avrebbero trovato dopo Cantor seri motivi per confutarlo, e si sarebbero serviti, per questo, di testimonianze anche più antiche di quella di Simplicio. Duhem¹² ebbe anche modo di osservare che alcune pagine di Damascio, che fu maestro di Simplicio, non si collocherebbero male tra gli scritti di Bergson, e si potrebbe aggiungere, ipotizzando, di Brouwer. Le certezze di Cantor furono perciò attaccate da chi si riallacciò direttamente alle tesi che egli aveva pensato di annullare con l'evidenza dei risultati matematici. L'intuizionismo di Weyl e di Brouwer restaurò il pieno

diritto di sopravvivenza dell'apriorismo kantiano del tempo.

Ma prima che ciò avvenisse la matematica trovò gli argomenti per esprimere una decisa confutazione delle tesi aristoteliche e tomiste sull'inesistenza dell'infinito. La vera svolta arrivò alla fine dell'800 con la teoria degli insiemi di Cantor, ma alcuni fatti matematici la anticiparono riproducendo molto da vicino i meccanismi di generazione dei numeri transfiniti e degli insiemi di potenza superiore al numerabile. Soprattutto un teorema di du Bois-Reymond vale la pena ricordare, e per questo converrà seguire la traccia espositiva di un trattato di E. Borel, la *Théorie des fonctions* (Paris, 1928).

Si immagini di scegliere una successione di funzioni crescenti $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \dots$, ad esempio

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_2(x) &= 2x, \\ f_3(x) &= 3x, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ f_m(x) &= mx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

cioè $f_m(x)$ è la funzione che associa ad ogni numero il prodotto di questo numero per m . Tale successione gode di un'evidente proprietà: facendo variare x tra i numeri interi positivi, i valori assunti da $f_m(x)$ sono minori dei valori assunti da $f_n(x)$ nel caso n sia maggiore di m ($n > m$). Questa circostanza può essere sinteticamente descritta scrivendo

$$f_m(x) < f_n(x) \quad \text{se } n > m.$$

Le funzioni $f_1(x), f_1(x), \dots$ formano allora una successione *indefinita* tale che ogni elemento della successione è «maggiore» di quelli che lo precedono nel senso definito dalla relazione precedente. Si può scrivere cioè

$$f_1(x) < f_2(x) < \dots < f_m(x) < \dots .$$

Esiste una funzione $f(x)$ crescente che sia «maggiore» di *tutte* le funzioni $f_m(x)$? Se la ricerca di tale funzione resta vincolata alla successione $\{f_m(x)\}$ la risposta è ovviamente negativa, ma se l'indagine può svolgersi al di fuori della successione una simile funzione in un certo senso esiste. Si pensi a $f(x) = x^2$, cioè alla funzione che ad ogni intero positivo associa il suo quadrato. Tale funzione ha la proprietà di «superare» ogni altra $f_m(x)$ per qualsiasi m prefissato, almeno da un certo x in poi; in tal senso essa «cresce» più velocemente di *tutte* le funzioni $f_m(x)$, e nel medesimo senso si potrà affermare che $f(x) = x^2$ è «maggiore» di

queste. Si potrebbe ora ricominciare da questo punto con una nuova successione di funzioni:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x) = x^2, \\ g_2(x) &= x^3, \\ g_3(x) &= x^4, \\ &\dots \\ &\dots \\ g_m(x) &= x^{m+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Anche in questo caso, pensando che x percorra la successione degli interi positivi, si ha senz'altro

$$g_m(x) < g_n(x) \text{ se } n > m.$$

Esiste allora una funzione $g(x)$ che sia «maggiore» di tutte le funzioni $g_m(x)$ senza appartenere alla successione $\{g_m(x)\}$. È sufficiente porre, infatti, $g(x) = 2^x$ in quanto la funzione esponenziale è «più veloce» di una qualsiasi potenza x^m . La stessa funzione 2^x potrebbe ora generare un'altra successione indefinita di funzioni crescenti maggiorabili da un'ulteriore funzione $h(x)$; e la funzione $h(x)$ così trovata sarebbe essa stessa l'inizio di un nuovo analogo procedimento. Si otterrebbe così una successione di funzioni

$$f(x), g(x), h(x), \dots$$

per la quale risulterebbe inferibile l'esistenza di una funzione maggiore di $f(x)$, di $g(x)$, di $h(x)$ e di *tutte* le altre funzioni seguenti.

In realtà, l'esistenza di funzioni dominanti un'infinità potenziale di funzioni crescenti è assicurata per ogni caso specifico da un teorema di du Bois-Reymond; un teorema di carattere generale e ricchissimo di implicazioni il cui enunciato è così formulabile: «Data una qualsiasi successione numerabile di funzioni crescenti:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \dots$$

della variabile reale x , esiste una funzione crescente ed effettivamente costruibile $f(x)$ tale che $f(x) > f_m(x)$ ».

Evidentemente il teorema trasferisce al rango di 'fatto' matematico la regola che sottende ogni tentativo attendibile di esibire l'infinito attuale come evento concreto: un'entità capace di limitare una infinità potenziale di oggetti di cui non fa parte. Ma è anche vero che lo stesso teorema allude alla possibilità di superare ogni limite immaginabile, perché apre una prospettiva in cui ciò che appare la possibile metafora di un definitivo

raggiungimento dell'infinito è solo un confine provvisorio che suggerisce un proseguimento: come promette l'esempio descritto, è chiaro che nessuna successione numerabile riesce a colmare la classe di funzioni 'costruibili' mediante il teorema di du Bois-Reymond. Per lo stesso teorema, infatti, una *qualsiasi* «indefinita» (cioè «infinità numerabile») di funzioni crescenti ammette al di fuori di sé una nuova funzione. Ciò vuole semplicemente significare che la parola «indefinito» è inadeguata alla descrizione sintetica della classe di funzioni generabili con il meccanismo suggerito dal teorema. Non solo c'è sempre qualcosa al di là di ciò che si è finora riusciti a contare; ma c'è anche qualcosa che non si riuscirà mai a raggiungere neppure postulando l'esistenza di entità «limite» dominanti l'inesauribile potenzialità del contare. L'incolmabilità dell'ἄπειρον trapassa così dall'«indefinito» al «transfinito»: la circostanza per cui dopo ogni numero ce n'è un altro (ciò che definisce il senso del termine «indefinito») si traspone nell'analoga circostanza che prevede dopo una qualsiasi successione indefinita un termine limitante che produca una nuova unità, e perciò un'ulteriore infinità numerabile (ciò che definisce il senso della parola «transfinito»).

Du Bois-Reymond non parlò tuttavia in modo esplicito di «transfinità». Fu piuttosto Cantor ad estrarre dai fatti matematici una teoria sistematica dell'infinito cui questi alludevano. Non lo fece usando i risultati di du Bois-Reymond, che pur conosceva, ma estendendo al di là del loro significato più immediato risultati e teoremi sugli insiemi di convergenza delle serie trigonometriche. Egli prolungò in questo settore le ricerche già avviate da Fourier, Hankel, Riemann, utilizzando tuttavia il punto di vista e lo stile di Weierstrass, che erano già insiemistici, statici, e in tal senso orientati alla manipolazione di aggregati attualmente infiniti.

Nel 1883 Cantor poteva affermare che i tempi erano maturi per l'introduzione di una nuova specie di infinito. Questo era già apparso di fatto nella geometria e nella teoria delle funzioni. Lo studio delle funzioni analitiche di una variabile complessa prevedeva l'esame di punti sul piano, ad una distanza infinita dall'origine, nel cui intorno la funzione presentava proprietà analoghe a quelle negli intorni di punti al finito. Ora, l'indagine sulla «struttura» degli intervalli di convergenza delle serie trigonometriche portava a considerare sistemi di punti cui venisse applicata un numero infinito di volte l'operazione di «derivazione».¹³ Ciò era sufficiente per concludere che accanto all'infinito *improprio*, cioè potenziale o sincategorematico, di Aristotele e san Tommaso (ma anche di matematici come Eulero, Cauchy, Gauss) era concepibile e legittimo un infinito *proprio*, cioè perfettamente determinato e dunque attuale.

Un simile carattere di attualità presentavano, per Cantor, i numeri con cui si era potuto estendere il procedimento del

contare dall'infinito al transfinito; e non si farebbe probabilmente un torto alla sua invenzione riferendosi per comodità analogica ai risultati di du Bois-Reymond, ed estraendo da questi i motivi dell'ispirazione di Cantor, che pur si innestò su differenti problemi. Un simile accostamento fu pensato e descritto da Borel nella sua *Théorie des fonctions*.

Conviene tener presente che il teorema di du Bois-Reymond può essere indefinitamente applicato ad ogni infinità numerabile di funzioni crescenti; e questa indefinita applicazione è innescata da un'unica funzione, $f(x)$, che sia crescente e maggiore di x almeno da un certo x in poi. Si potrebbe porre ad esempio $f(x) = 2x$ e definire la successione

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) = 2^x, \\ f_2(x) &= f(f_1(x)) = 2^{2^x}, \\ f_m(x) &= f(f_{m-1}(x)) = 2^{2^{\dots^{2^x}}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Una funzione dominante tale successione potrebbe allora essere indicata con il simbolo $f_\omega(x)$, e la relazione di maggiorazione

$$f_\omega(x) > f_m(x) \text{ per ogni } m,$$

potrebbe essere scritta brevemente, per pura convenzione, come

$$\omega > m \text{ per ogni } m.$$

La funzione $f_\omega(x)$ potrebbe a sua volta generare una nuova infinità numerabile di funzioni

$$\begin{aligned} f_\omega(x) \\ f_\omega(f(x)) &= f_{2\omega}(x), \\ &\dots \\ f_\omega(f_{(m-1)\omega}(x)) &= f_{m\omega}(x), \\ &\dots \end{aligned}$$

cui si possa riapplicare il teorema di du Bois-Reymond. In analogia con il caso precedente si potrebbe chiamare $f_{\omega^2}(x)$ la nuova funzione dominante, e descrivere la circostanza per cui $f_{\omega^2}(x) > f_{m\omega}(x)$ per ogni m scrivendo per convenzione

$$\omega^2 > m_\omega \text{ per ogni } m.$$

La funzione $f_{\omega^2}(x)$ sarebbe nuovamente utilizzabile per generare un'altra infinità numerabile di funzioni: ed è chiaro che, nello stesso modo che il contare prevede per ogni intero un intero successivo, così ogni infinità numerabile di funzioni prevede un'ulteriore infinità numerabile costruibile con la sua funzione

dominante. Le successive applicazioni del teorema di du Bois-Reymond suggeriscono allora un susseguirsi dei simboli

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \alpha, \dots;$$

pensabili come indici successivi delle funzioni via via definite. Una tale sequenza fa immaginare un'estensione del procedimento del contare che rifletta in qualche modo il livello di infinità della classe delle funzioni generate mediante il teorema di du Bois-Reymond.

È chiaro che la numerazione transfinita di Cantor può essere introdotta in modo del tutto autonomo; ma l'analogia di risultati non dissimili, come appunto quelli di du Bois-Reymond, le conferisce l'aspetto di legittimità e di verità che è di solito indotto da tutto ciò che presenta l'aspetto di un 'fatto' o di una 'dimostrazione' matematica. Si tratta tuttavia di semplice analogia: i numeri transfiniti di Cantor furono giustificati da principi a priori, non da teoremi o fatti matematici; come nel caso dei numeri reali definiti da Dedekind, furono alcuni postulati e in definitiva un libero atto di creazione a decidere dell'esistenza dei nuovi oggetti. Ma conviene ora usare le parole di Cantor, riportando quasi integralmente un passo decisivo di una memoria del 1883: «Noi dobbiamo ora mostrare come si è condotti alle definizioni di questi nuovi numeri, e in qual modo si ottengono, nella successione dei numeri reali assolutamente infinita, le divisioni naturali che io chiamo *classi di numeri*. La serie (I) dei numeri interi reali positivi 1,2,3, ..., ν , ... deve la sua formazione alla ripetizione e alla riunione di unità che si sono prese come punto di partenza e che si sono considerate come uguali; il numero ν esprime un numero finito determinato di ripetizioni successive di questo genere, così pure come la riunione delle unità scelte in un'unica totalità. La formazione dei numeri interi reali *finiti* si basa dunque sul principio dell'addizione di un'unità a un numero *già formato*; chiamo *primo principio* di formazione questo momento che, come presto vedremo, svolge un ruolo essenziale nella produzione dei numeri interi superiori. Il numero dei numeri ν della classe (I) formata in questo modo è infinito e tra tutti questi numeri non ce n'è uno che sia più grande di tutti gli altri. Sarebbe dunque contraddittorio parlare di un numero massimo della classe (I); tuttavia si può d'altronde immaginare un nuovo numero, che chiameremo ω , che *servirà a esprimere che l'intero insieme* (I) *è dato in virtù della legge nella sua successione naturale*. Si può anche rappresentarsi il nuovo numero ω come il limite verso cui tendono i numeri ν , alla condizione di intendere con ciò che ω sarà il *primo* numero intero che *seguirà tutti* i numeri ν , in modo che occorra dichiararlo superiore a *tutti* i numeri ν . Associando il numero ω con le unità primitive si ottengono con l'aiuto del *primo principio* di

formazione i numeri più estesi:

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots;$$

poiché in tal guisa non si arriva ancora una volta ad alcun numero massimo, se ne immagina uno nuovo, che si può chiamare 2ω e che sarà il *primo* dopo tutti i numeri finora ottenuti ν e $\omega + \nu$; se si applica ancora al numero 2ω il primo principio di formazione, si arriva a prolungare come segue i numeri ottenuti fino a questo momento:

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots, 2\omega + \nu, \dots$$

La funzione logica che ci ha dato i due numeri ω e 2ω è evidentemente differente dal primo principio di formazione; lo chiamo secondo principio di formazione dei numeri reali interi e definisco meglio questo principio dicendo: *Essendo data una successione qualsiasi determinata di numeri interi reali definiti, tra i quali non ce ne sia uno che sia più grande di tutti gli altri, si pone, basandosi su questo secondo principio di formazione, un nuovo numero che si considera come il limite dei primi, che è cioè definito come immediatamente superiore a tutti questi numeri.*

«Applicando e combinando questi *due* principi di formazione si ottengono quindi successivamente le continuazioni dei numeri che abbiamo fin qui ottenuto, come segue:

$$3\omega, 3\omega + 1, \dots, 3\omega + \nu, \dots$$

.....

$$\mu\omega, \mu\omega + 1, \dots, \mu\omega + \nu, \dots$$

.....

«Tuttavia non ne siamo giunti alla fine, poiché tra i numeri non ce n'è neanche uno che sia più grande di tutti gli altri.

«Il secondo principio di formazione ci consente dunque di introdurre un numero che segua tutti gli altri $\mu\omega + \nu$, e che si può denominare ω^2 ; a questo numero si riferiranno in un determinato ordine di successione:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$$

e si arriva allora evidentemente, seguendo i due principi di formazione, a dei numeri della forma:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

ma allora il secondo principio di formazione ci porta a definire un nuovo numero che sarà immediatamente superiore a tutti questi numeri e che si potrà designare con ω^ω .

«La formazione di nuovi numeri, come si vede, è *senza fine*; seguendo i due principi di formazione si ottengono sempre nuovi numeri e nuove serie di numeri, con una *successione perfettamente determinata*.

«Si potrebbe dunque credere da principio che andiamo a perderci nell'infinito in questa formazione di nuovi numeri interi infiniti determinati e che non siamo nelle condizioni di *arrestare provvisoriamente* questo procedimento senza fine, per arrivare con ciò a una *limitazione simile a quella che abbiamo trovato, infatti, in un certo senso, in rapporto alla precedente classe di numeri (I); ...*

«Ma se noi osserviamo ora che tutti i numeri ottenuti finora e quelli che li seguono immediatamente soddisfano una certa condizione, vedremo che questa condizione, se la si pone come obbligatoria per tutti i numeri da formare immediatamente, ci appare come un *terzo principio*, che viene ad aggiungersi ai primi due e che io chiamo *principio di arresto o di limitazione*. In virtù di questo principio, come farò vedere, la seconda classe di numeri (II), definita con l'aggiunzione di questo principio, acquista non solo una potenza più elevata della (I), ma *precisamente la potenza immediatamente superiore*, e per conseguenza la *seconda potenza*.

«La condizione appena menzionata e che è soddisfatta, come ci si può immediatamente convincere, da ciascuno dei numeri infiniti α sin qui definiti, è: *che il sistema dei numeri che si trovano, nella successione dei numeri, prima di quello che si considera e a partire da 1, sia della stessa potenza della prima classe di numeri (I)...*

«Noi definiamo dunque la seconda classe di numeri (II): l'insieme di tutti i numeri α che si possono formare mediante i due principi di formazione, che si susseguono seguendo un ordine determinato:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}, \dots, \omega^{\omega}, \dots, \omega^{\omega\omega}, \dots, \alpha, \dots$$

e che sono sottomessi a questa condizione, che tutti i numeri che precedono il numero α , a partire da 1, formano un sistema della stessa potenza della classe di numeri (I)». ¹⁴

Dunque il primo intero transfinito, ω , deve essere inteso come un limite cui tende la variabile intera finita v , allo stesso modo in cui un numero irrazionale, ad esempio $\sqrt{2}$ può essere visto come il limite di una variabile. I numeri transfiniti, scrisse Cantor, assomigliano in un certo senso a nuove entità irrazionali, anzi ne imitano la più profonda natura, perché entrambi delineano i tratti e le imprescindibili caratteristiche dell'infinito attuale.

Estrapolando l'osservazione di Taylor sulla possibile visualizzazione dei numeri irrazionali come sintesi platoniche

dell'uno e del due, si potrebbe accostare il terzo principio di limitazione di Cantor al teorema che stabilisce l'univoca definibilità delle sezioni di Dedekind. Entrambi alludono a un confine, a una correzione limitante: l'uno produce l'argine capace di fermare la straripante potenza di generazione del secondo principio vincolandolo, al pari del teorema di du Bois-Reymond, ad applicarsi ad infinità non più che numerabili; l'altro delimita l'infinità di oscillazioni di cui è l'imprescindibile centro di riferimento e l'ideale punto d'arresto. È sempre un segno dell'intervento dell'Uno sul Due, oppure, come si esprime Simone Weil, un «segno del dominio dell'infinito sull'indefinito».¹⁵ Fu in effetti un insuperato merito di Cantor quello di aver in tal modo imposto una struttura ordinata alla complessità abissale del transfinito. In virtù del principio di *limitazione* egli individuò un ordinamento di successive cardinalità in cui potessero raggrupparsi i numeri generati dai primi due principi. «Con questo metodo,» egli scrisse «osservando questi tre principi, si può sempre arrivare a delle nuove classi di numeri, e, con esse, a tutte le diverse potenze, successivamente crescenti, che si incontrano nella natura materiale o immateriale; i nuovi numeri così ottenuti hanno allora sempre la stessa precisione concreta e la stessa realtà oggettiva dei precedenti...».¹⁶

Le analogie tra Dedekind e Cantor investono anche lo stile fondamentale del pensiero e le convinzioni più profonde sulla natura dell'invenzione matematica. Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen?*, Prefazione alla prima edizione e § 1) non esitò ad affermare che l'aritmetica si svolge in perfetta indipendenza dalle intuizioni a priori dello spazio e del tempo e che il concetto di numero è un risultato immediato delle leggi del pensiero. In un modo che ricorda Bolzano oltre che Cantor, egli immaginò di poter chiamare con il nome già compromettente di «cosa» un qualsiasi oggetto della nostra attività mentale e cominciò ad alludere alla convenienza operativa di designare tali «cose» con dei semplici simboli disegnati sulla carta.

Per quanto tali segni *non* si identificassero con le cose stesse, essendo mere rappresentazioni convenzionali utili a richiamare in breve l'oggetto designato, è lecito dubitare di questa pretesa neutralità del simbolo scritto. L'arcaica somiglianza dei segni con le cose, il loro potere di evocare analogie e di innescare movimenti di simpatie e corrispondenze su tutti i piani del reale, difficilmente potrebbe pensarsi del tutto sradicato e obliterato; neppure, si può supporre, nella reale intenzione che traluce dagli scritti di Dedekind. Una «cosa» poteva essere completamente determinata, per Dedekind, da tutto ciò che di essa potesse essere detto o pensato; e si può ritenere che fosse proprio questa audace affermazione da mettere in corrispondenza con la designabilità di questa stessa «cosa» con un nome o con un segno. Tanto più determinato appare un oggetto, tanto più

facilmente lo si nomina: consuetudine, questa, non troppo scontata quando accadesse che l'oggetto contrassegnato da questa pretesa determinazione fosse l'infinito.

Cantor sottoscrisse analoghe affermazioni. Si possono considerare i numeri interi, compresi quelli transfiniti, come «attuali», egli scrisse, in quanto sulla base delle definizioni essi «assumono un posto perfettamente determinato nella nostra conoscenza, sono chiaramente distinti da tutti gli altri costituenti del nostro pensiero, stanno in definite relazioni con essi e perciò modificano, in modo definito, la sostanza della nostra mente».¹⁷ Il termine «attuale» coinvolge però, in qualche modo, anche la realtà del mondo esterno in cui Cantor intuisce possa trovarsi un corrispettivo delle nostre invenzioni intellettuali. Nel 1895, egli premise ad una delle sue ultime pubblicazioni il motto latino: «Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus»;¹⁸ ovvero: non inventiamo ad arbitrio le leggi del pensiero e del mondo, ma le riceviamo, come scribi fedeli, trasmesse dalla voce della natura; sicché, scrisse altrove Cantor, «i numeri interi con le loro leggi e relazioni costituiscono una totalità allo stesso modo dei corpi celesti».¹⁹

Eppure sull'effettiva 'esistenza' dei nuovi enti matematici Cantor non osò pronunciarsi. Egli separò la matematica dalla metafisica sostenendo che la prima era libera di muoversi e svilupparsi in perfetta autonomia, soggetta all'unica condizione della non contraddittorietà e della coerenza intrinseca dei suoi enunciati. Il problema di 'esistenza' era metafisico e come tale estraneo agli scopi della matematica.

Cantor giunse così a posizioni non lontane dal formalismo, e perlomeno intorno al 1882 arrivò a sostenere che i numeri reali sono da considerarsi semplici segni privi inizialmente di qualsiasi proprietà e solo a posteriori corredati con un sistema di regole che ne indicassero il senso. Dell'Assoluto Cantor riconobbe di non poter dare, con i numeri transfiniti, neppure una approssimativa comprensione. L'Assoluto può solo essere riconosciuto (*anerkannt*) ma mai conosciuto (*erkannt*) neppure approssimativamente.²⁰

Questa idea di *impossibilità*, in cui capita di imbattersi spesso sorprendentemente anche nell'ambito di un procedimento mentale rigorosamente matematico, designa per lo più l'insuperabile ostacolo della potenza connaturata a qualsiasi oggetto pensato; c'è sempre, allora, esattamente come aveva già osservato Aristotele, un *oltre*, un *di più* non ancora calcolato o previsto. L'impossibilità acquista talvolta il senso di una «non definibilità», di una «incalcolabilità». In un articolo del 1938 A. Church²¹ precisava che la seconda classe (II) dei numeri transfiniti di Cantor, anche se caratterizzata da quella sorta di

realtà oggettiva che Cantor le aveva attribuito, contiene elementi che si sottraggono a qualsiasi definizione costruttiva, a qualsiasi denominazione che sia l'ultimo passo di un effettivo procedimento di calcolo. Il suggerimento già avanzato da Borel che la dimostrazione diagonale di Cantor della non numerabilità del continuo dovesse rivelare in quest'ultimo un'incorreggibile indefinitezza era trasponibile nella così detta seconda classe dei numeri transfiniti. Conformemente al senso del termine «calcolabile» precisato da Kleene, Turing e Church, era provata l'esistenza di elementi della seconda classe non descrivibili nelle formule del λ -formalismo, in base alla semplice circostanza che l'estendibilità della nozione di costruibilità designata da queste formule era limitata agli insiemi ricorsivamente numerabili.

Cantor si era già preoccupato di dimostrare che la potenza dei numeri della seconda classe era superiore al numerabile.

1. Cfr. L. Brunschvicg, *Les étapes de la Philosophie mathématique*, Paris, 1929, p. 209.
2. *Ibidem*, p. 208.
3. *Réponses de l'auteur aux cinquièmes objections faites par M. Gassendi*, op. cit., p. 491.
4. L. Brunschvicg, op. cit., pp. 243-244.
5. *Frammenti*, 1153; ed. cit., p. 295.
6. *Wissenschaftslehre*, § 87.
7. Cfr. H. Weyl, op. cit., p. 46.
8. *Ibidem*.
9. «Acta mathematica», 2, 1883, p. 403.
10. *Filosofia delle forme simboliche*, Firenze, 1961, p. 218.
11. Cfr. P. Duhem, op. cit., vol. I, p. 80.
12. *Ibidem*, p. 271.
13. Cfr. la prefazione di P. Jourdain a *Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, New York, 1955.
14. *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, in «Acta mathematica», 2, 1883, pp. 385-388.
15. *Cahiers*, III, Paris, 1974, p. 41.
16. «Acta mathematica», 2, 1883, p. 390.
17. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, cit., p. 67.
18. Cfr. A.A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, fourth revised edition, Amsterdam, 1976, p. 80.
19. *Ibidem*.
20. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, cit., p. 62.
21. *The Constructive Second Number Class*, in «Bull. Amer. Math. Soc.», 44, 1938, pp. 224-232.

XII

LE ANTINOMIE

Dopo Cantor ci fu chi si preoccupò di ricapitolare le prove e le giustificazioni dell'uso matematico dell'infinito attuale. La nota più insistente era l'appello all'indipendenza della nozione di numero dal supporto intuitivo ed empirico dell'ordinario processo del contare; la fondazione del numero su un piano puramente logico; l'indipendenza di ogni definizione matematica da qualsiasi esigenza di riscontro nel mondo dell'apparenza sensibile. L'idea era che il sistema dell'aritmetica dovesse trovare il suo più vero compimento nell'ambito di un'elaborazione autonoma di concetti pensati a priori: ogni giustificazione era da ricercarsi nell'interna necessità di leggi operanti in una costruzione puramente matematica.

La natura dei principi che governarono un tipo di matematica cantoriana e post-cantoriana, avallando l'estensione del numero al transfinito, non si discostò troppo dalle ragioni invocate ad esempio da Gauss,¹ prima di Cantor, per un ampliamento del numero che comprendesse l'immaginario; ragioni governate dalla tacita premessa che l'eventuale acquisizione di nuovi concetti fosse brevemente giustificabile con lo stesso giro di frase pronunciato all'indirizzo del giovane Törless dal suo insegnante di matematica, proprio intorno al senso dei numeri immaginari: «Lei deve accettare il fatto che tali concetti matematici non sono né più né meno che concetti inerenti alla natura del pensiero puramente matematico».

Cantor aveva ricordato che l'uso dell'infinito nella Geometria era tale da consentire ormai l'introduzione dell'infinito «proprio», cioè attuale, accanto a quello sincategorematico di san Tommaso. L. Couturat insistette, dopo Cantor, sull'intima analogia tra l'infinito geometrico e i numeri immaginari: entrambi erano in fondo riferibili a entità matematiche più facilmente accessibili all'ordinaria immaginazione; l'infinito essendo rapportabile con opportune trasformazioni a configurazioni ove intervenisse unicamente il finito e gli elementi immaginari di una figura essendo il corrispondente delle parti reali di una figura dello stesso genere.²

Il principio di continuità di Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822), che era un'estensione dell'analogo

principio di Leibniz, sottostava a questo genere di deduzioni: l'infinito attuale geometrico ne era una sorta di corollario. Ma volendo centrare uno dei motivi portanti dell'estensione aritmetica al transfinito si dovrebbe insistere sulla trasformazione dell'idea di numero, trasformazione non priva in ogni caso di richiami all'antico. Couturat commentò il lavoro di Cantor ricordando che uno dei suoi meriti era consistito nell'aver esaltato il carattere unitario e «organico» del numero intero: l'unità è non solo l'elemento costitutivo del numero e della sua molteplicità, bensì anche il nodo conclusivo che ne sancisce l'aspetto di totalità.³ Il numero è essenzialmente cardinalità, cioè classe di classi in corrispondenza biunivoca tra loro, e tale astrazione non ha bisogno, per sussistere, di una speciale enumerazione; l'enumerazione non è che una «conoscenza esplicita di un numero già pensato e implicitamente determinato»; il numero non è il risultato del contare, ma ne è la condizione. La conseguenza è che per formare l'idea di numero non è indispensabile conoscere la molteplicità come divenire temporale e l'Aritmetica non può essere, come voleva Kant, una scienza del tempo.⁴

Couturat proseguì le tesi di Cantor facendo del numero un'entità formale completamente definita a priori, vuota di ogni contenuto materiale e concreto. La molteplicità fenomenica, egli suggerì con una metafora della metafisica tradizionale, gioca nei riguardi dell'unità sancita dal numero il ruolo del prisma perforato da un raggio di luce bianca: essa lo rifrange e lo disperde nelle cose.⁵ Il trattato *De l'infini mathématique* (Paris, 1896) di L. Couturat fu uno dei culmini di questa concezione statica del numero e dell'infinità attuale, proposta come verità indotta dai teoremi cantoriani e perfino dalla legge di continuità com'era stata formulata da Leibniz in poi.

Analoghi tentativi sorpassarono la soglia del secolo per approdare a quello che A. Fraenkel definì uno degli eventi più drammatici della storia della matematica: le prime dimostrazioni del teorema del buon ordinamento proposte da Zermelo nel 1904 e 1908. Zermelo riuscì a dimostrare (ma la cosa fu controversa) che in *ogni* insieme M , e in particolare in ogni insieme infinito, è definibile ciò che si chiama un *buon ordinamento*, cioè una relazione d'ordine, che si potrebbe immaginare per semplicità analoga al «maggiore» o «minore» dei numeri, caratterizzata dalla seguente proprietà: ciascuno dei sottoinsiemi non vuoti dell'insieme dato M ha un elemento più piccolo di tutti gli altri; e in particolare per *ogni* coppia di elementi di M , a e b , si può dire quale è il «maggiore» o il «minore» dei due (il che non è vero per la più debole proprietà dell'*ordinamento parziale*, per cui la domanda quale tra due elementi sia il più piccolo può rimanere senza risposta: basti pensare all'esempio della relazione di inclusione tra insiemi). In realtà, notò Lebesgue in una lettera a

Borel,⁶ più esattamente Zermelo seppe dimostrare che un insieme M può essere bene ordinato tutte le volte che si ammette l'esistenza attuale di una funzione che ad *ogni* sottoinsieme M' di M associa un particolare elemento m' di M' . Questa funzione di *scelta*, se pensata esistente, trasformava la potenzialità inesauribile dell'operazione di ordinamento in una realtà statica e totale.

Il metodo intuitivo di ordinamento, sul quale si fermarono i tentativi preliminari di Cantor, doveva consistere in una sorta di conteggio degli elementi da ordinare, uno *dopo* l'altro, in successione temporale, sulla base di una estensione dell'ordinario procedimento del contare al transfinito. L'ipotesi di esistenza della funzione di scelta di Zermelo (che divenne un assioma della teoria degli insiemi) era tale da rompere i vincoli della successione temporale delle scelte, rendendo simultaneo ciò che il tempo costringeva ad essere successivo.

I risultati di Zermelo erano di grande interesse matematico: essi consentivano di estendere l'applicabilità del principio di induzione, e in particolare dell'induzione transfinita, a un numero di casi ben maggiore del previsto; e fornivano ancora un insostituibile contributo ad una fondazione soddisfacente dei numeri cardinali. Le classi di insiemi infiniti equivalenti (cioè in corrispondenza biunivoca tra loro) che Cantor prudentemente chiamava «potenze», per evitare una troppo precipitosa applicazione dell'idea di numero a tali astrazioni, potevano assurgere più ragionevolmente a «numeri» qualora fosse stata provata nel modo più generale la loro confrontabilità, al pari dei numeri ordinari finiti. Tale confrontabilità era assicurata dal teorema di buon ordinamento di Zermelo. Anzi, il teorema di buon ordinamento, l'assioma che stabiliva l'esistenza della funzione di scelta e il teorema di confrontabilità tra «potenze» erano oggetti matematicamente equivalenti, cioè ciascuno di essi implicava come teorema l'altro. Si trattava di tre analoghe formulazioni di un'unica scelta fondamentale: la sostituzione dell'infinito potenziale, tradizionalmente associato al tempo (di cui pure Cantor continuò a consentire una parallela sopravvivenza chiamandolo infinito «improprio»), con l'infinito pensato come totalità attuale, statica, atemporale.⁷

Le invenzioni matematiche di Cantor non rimasero tuttavia immuni da critiche e tenaci opposizioni. Le critiche sorpassarono anche il livello di amichevoli disaccordi intorno a questioni di metodi e procedure; in alcuni casi si mutarono in violenti contrasti e profonde inimicizie, fino a compromettere la stessa salute fisica e psichica di Cantor. Kronecker, che capeggiò fino alla morte l'opposizione ad ogni tentativo di fondazione dell'infinito attuale, giunse ad attribuire alle innovazioni di Cantor qualità sataniche. Egli seguì di fatto la via opposta a quella che aveva condotto alle principali innovazioni implicanti

l'infinito: la definizione del continuo con le relative proposte di Dedekind e Cantor, e la estensione del procedimento del contare al transfinito. L'approccio di Cantor-Dedekind al problema del continuo implicava in effetti una sorta di 'intrusione', nel regno della pura aritmetica degli interi, di proposizioni o teoremi indimostrabili se non al prezzo di introdurre nuovi postulati. Proporre i numeri reali come segni effettivi per la *misura* di determinate quantità della geometria, voleva dire avallare l'ingresso di un assioma che stabilisse la riferibilità delle serie di interi associate agli irrazionali a certi *punti* dello spazio. E questo rappresentava per Kronecker un ibrido incontro dell'aritmetica con le intuizioni spettanti alla geometria; una costruzione artificiale per una problematica conciliazione tra la scienza del numero intero, che era un puro prodotto mentale, con la scienza dello spazio che era pur sempre concepibile come qualcosa di *esterno*, perché legato in qualche modo all'intuizione sensibile. Kronecker⁸ aspirava in verità alla costituzione di una scienza aritmetica estendibile fino all'inclusione dell'algebra e dell'analisi, ma separata nettamente dalla geometria, e così pure dalla meccanica. In tal senso egli auspicava una «aritmetizzazione» fondata sul numero inteso nel senso più ristretto possibile, con la conseguenza che gli stessi numeri negativi, frazionari e algebrici dovevano rapportarsi a particolari espressioni definibili con gli interi e con le funzioni di indeterminate (*indeterminatae*) introdotte da Gauss. L'«esistenza» dei numeri algebrici, ovvero delle radici di un'equazione ottenuta eguagliando a zero un polinomio, doveva prospettarsi come il mero riconoscimento di intervalli in cui il polinomio cambiasse di segno⁹ e quindi, sempre evitando mediante indeterminate e congruenze i numeri frazionari, ci si poteva anche in tal caso ricondurre ai soli numeri interi. Anche l'ausilio della logica era per Kronecker da considerarsi estraneo ai contenuti della pura aritmetica: l'evidenza logica di un ragionamento non garantisce la legittimità di una sua utilizzazione, egli pensava; non è sufficiente, per dimostrare un teorema, provare che la negazione del suo enunciato implichi una contraddizione, e in generale è solo un effettivo procedimento fondato su un numero finito di operazioni aritmetiche a condurre a un risultato sicuro.¹⁰ Quanto basta per scongiurare il pericolo delle antinomie, e per delineare uno stile di indagine che sarebbe poi stato quello degli intuizionisti.

La scoperta dei paradossi logici,¹¹ a cominciare da quella di Burali-Forti, nel 1897, acuì la polemica e servì a dimostrare nel contempo che gli oggetti che si pretendeva dovessero «esistere» in virtù di semplici atti di creazione mentale erano spesso viziati da intrinseche contraddizioni. Nei primi anni del '900 l'opposizione si irrobustì e vi si associarono matematici come Poincaré, il quale così scrisse nel 1908: «Non esiste alcun infinito

attuale (dato nella sua totalità). I cantoriani l'hanno dimenticato e sono caduti in contraddizione». ¹²

Chi negò dopo Cantor l'esistenza dell'infinito attuale proposta dal nuovo linguaggio insiemistico si trovò per lo più a dover confutare anche ciò che Cantor aveva in parte ispirato: le tesi logiciste dei *Principia mathematica* di Russell e Whitehead. Dai *Principia* e dai successivi commenti di Russell si sarebbe in effetti dovuto dedurre un certo carattere di rigore incontrovertibile di alcuni risultati di Cantor, una loro capacità a sradicare le più sedimentate convinzioni filosofiche in nome della nuova evidenza matematica. Questa nuova evidenza era del resto una diretta conseguenza del processo di aritmetizzazione della matematica effettuato da Weierstrass e Cantor. In tale visualizzazione i numeri interi erano sufficienti a descrivere i risultati dell'Analisi; ma i numeri interi erano stati a loro volta descritti nella logica simbolica di Peano che sembrava mettere a nudo un tessuto logico primario atto a fornire una fondazione extramatematica del più elementare processo del contare. La logica trasmetteva così, attraverso l'aritmetica, un potente contributo al riconoscimento dell'infinito come totalità. Da alcune semplici premesse logiche sembravano poter scaturire, per passaggi intermedi, quelle conclusioni che la filosofia tradizionale aveva sempre respinto. Tra queste una fondazione attendibile dell'infinito attuale e una nuova definizione del continuo, che avrebbe dovuto una volta per tutte togliere di mezzo le pretese filosofiche di chi voleva che i punti dello spazio esistessero solo in potenza. La nuova definizione del continuo si poneva come «assoluta», completamente a priori, libera da ogni vincolo spazio-temporale, e prevedeva come connotazione essenziale una struttura composta da elementi costituenti elementari, numeri reali o punti: enti di cui la filosofia ispirata ad Aristotele (ma non solo ad Aristotele) aveva sempre sancito l'inadeguatezza a rappresentare le parti di un tutto caratterizzato dall'idea di continuità.

Russell insistette su tali questioni esibendo convinzioni apparentemente invincibili. «Si sostenne spesso» egli scrisse ad esempio «che qualsiasi materia che ne fosse in possesso [della continuità] non poteva essere in realtà decomposta in elementi. Cantor ha dimostrato che tale opinione è erronea, sulla base di una precisa definizione del genere di continuità che deve appartenere allo spazio». ¹³

Tuttavia frasi come questa: «Cantor ha dimostrato che tale opinione è erronea» fanno dubitare sull'eventualità che non si stia con ciò formulando alcunché di più incontrovertibile di una semplice opinione. Già nel 1905-1906 Poincaré osservava che il linguaggio della logica simbolica di Peano, che tanto ispirò le tesi di Russell, offriva certezze in parte illusorie.

Le formule di tale linguaggio, che nulla sembravano concedere

alla ingenuità dell'ordinario buon senso, utilizzavano combinazioni di segni e simboli destinati a provocare l'impressione di manipolare verità e fatti primari. La «definizione» di tali verità sembrava allora a portata di mano, perché il gioco di simboli che la esprimeva presentava le caratteristiche di un'irriducibile durezza e semplicità.

Poincaré, anticipando in un certo senso Wittgenstein, indicò l'inadeguatezza di tali formule alla rappresentazione di fatti autenticamente primari; svelò le supposizioni e i concetti già impliciti nel linguaggio che avrebbe dovuto esprimerne la definizione; dimostrò quanto fosse difficile racchiudere in una formula linguistica definitiva l'essenza di ciò che caratterizza il pensiero matematico.¹⁴

Al di fuori della matematica è stato sempre più facile guardarsi dalla tentazione di scorgere in una qualsiasi formula linguistica la riproduzione verbale di una verità. Una qualsiasi asserzione ha un valore relativo, aveva scritto N. Cusano, ed è suscettibile di venire confutata. Basti pensare alla dialettica di Zenone o di Gorgia, oppure alla dialettica platonica ove, osservò S. Weil,¹⁵ due ingredienti essenziali, la *contraddizione* e l'*analogia*, sono usati per uscire dal «punto di vista», dalla conferma di alcunché intenda rigidamente proporsi come giudizio singolo e separato.

Lo stesso insegnamento è suggerito dalla lettura del *Don Chisciotte* di Cervantes. Tutto ivi converge alla vanificazione e futilità di qualsiasi angolo visuale da cui la realtà risulti separatamente contemplata. Quando nel 45° capitolo del primo *Don Chisciotte* si discute sulla reale natura dell'elmo di Mambrino, se si tratti di un elmo o della catinella di un barbiere, il problema appare insolubile. L'evidenza della soluzione si mescola alle ipotesi più inverosimili e il gioco illusorio che ne esce allude alla verità come punto limite impronunciabile: chi crede di possederla sostenendo che l'elmo è una catinella esce dalla disputa sconfitto e deriso. Una qualsiasi descrizione linguistica della realtà è, nel *Don Chisciotte*, immediatamente proiettata nel gioco di epiteti e denominazioni di cui ogni cosa è l'invisibile punto di riferimento: l'essenza della cosa rimane così irrimediabilmente celata.

Una singolare suggestione fa spesso ritenere, invece, che la matematica possa ritenersi uno strumento particolarmente privilegiato per l'indagine di alcuni concetti, fino al punto di offrire definizioni «assolute» e soluzioni definitive. La legittimità di quest'atto di fede non è sempre apparsa, però, immune da sospetti. Dagli appunti di Y. Smythies sappiamo ad esempio che Wittgenstein parlò dell'infinito di Cantor in termini tali da non incoraggiare troppo la convinzione di chi ritenesse l'infinito attuale un fatto ormai scontato. Cantor si lasciò guidare non poco dal fascino e dalla suggestione dei numeri che andava inventando, insistendo per di più su come fosse meraviglioso che

il matematico potesse, nella sua immaginazione, superare e trascendere ogni limite.¹⁶ L'arbitrio, lasciò intendere Wittgenstein, consiste in questi casi nella particolare forma di persuasione che l'apparente incontrovertibilità dei fatti matematici esercita su chi è predisposto a fare della passione per la Scienza una sorta di idolatria. I risultati scientifici accreditano facilmente asserzioni del tipo «Questo, *in realtà*, è questo», che hanno come unico effetto quello di persuadere a trascurare alcune differenze tra gli oggetti di cui si vuole stabilire l'identità, scavalcando per di più l'ovvia constatazione che di *realtà* è perlomeno inopportuno parlare, trattandosi sempre, se mai, di semplice rappresentazione o apparenza o metafora. Un fatto rappresenta *in realtà* prima di «questo» o «quello» anzitutto se stesso, e così pure i fatti matematici che Cantor aveva descritto avrebbero potuto essere espressi in modo da perdere gran parte del fascino che essi sembravano, in alcuni, suscitare.

Fu scritto che «ogni cosa è ciò che è e non un'altra cosa», e lo spirito di fredda censura irradiato da simili drastiche asserzioni, spirito conforme ai più ortodossi criteri del metodo scientifico, ebbe per lo meno l'effetto di produrre gli antidoti alle pretese da esso accampate. In particolare, quello che Wittgenstein definiva uno dei più bassi desideri dell'uomo di questo secolo, vale a dire la curiosità superficiale per le ultime scoperte della scienza, avrebbe dovuto trovare proprio nelle estreme conseguenze di quest'ultima la più attendibile rivelazione della propria inconsistenza.

La scoperta delle antinomie fu, a questo proposito, un motivo scatenante di dubbi e ripensamenti, ma sarebbe ingenuo supporre che la crisi delle certezze indotte dal sapere matematico rimanesse un fenomeno circoscritto all'ambito degli addetti ai lavori. Altre testimonianze sull'ambiguità di ogni appello alla ragione scientifica come espediente retorico del convincimento vennero da persone estranee all'esercizio matematico. In un senso decisamente generale, ma riferibile al caso di una qualsiasi particolare disciplina scientifica, T.W. Adorno avvertì l'intrinseca incongruenza di una qualsiasi asserzione filosofica che implicasse in qualche modo il gesto della persuasione. «Questo gesto» egli scrisse «presuppone una *universitas litterarum*, un'intesa a priori degli spiriti, in grado di comunicare l'uno con l'altro, e cioè, in una parola, l'intero conformismo». Con un'intenzione non troppo distante da quella che anticamente caratterizzò la dialettica, Adorno suggerì che compito di quest'ultima dovesse essere di eliminare dal discorso la «fissazione maniacale» di chiunque volesse far atto di persuasione del suo univoco e particolare punto di vista.¹⁷

Chi ha letto certe pagine della *Dialektik der Aufklärung* o di *Minima moralia*, sa in qual modo Adorno seppe riconnettere i più riposti motivi ispiratori del metodo scientifico, riconoscibili anche

più che altrove nella matematica, all'alienazione strisciante negli atti più insignificanti della vita. Il processo di astrazione operato dalla matematica era tipico dell'altro più generale processo di separazione del pensiero dal desiderio o dall'immaginazione o dall'emozione, che per Adorno risultava infine uno dei più sicuri segnali dell'incipiente inebetimento. Il deprezzamento dell'apriorismo kantiano era in tal senso emblematico: la separazione del continuo dal tempo, il divieto di *vedere*, nel senso concreto del termine, ciò che l'intelletto pensa astrattamente, ha come paradossale conseguenza l'atrofia delle stesse facoltà del pensiero, costretto al fine a riconoscere che «ogni conoscenza è falsa, ed è vero solo ciò per cui la questione del vero o del falso non si potrebbe nemmeno porre». Ciò produce l'effetto prevedibile descritto nella *Dialektik der Aufklärung*: l'equazione tra spirito e mondo si dissolve e la realtà, lasciata a se stessa, appare sempre più relegata a «brutale dato di fatto».

Quella specie di quintessenza della verità così generata, fuori dall'errore di chiunque non avesse l'accortezza di abolire gran parte della vita psichica per il raggiungimento di un'invisibile essenza, era suscettibile di generare quella che Musil definì, in *Der Mann ohne Eigenschaften*, l'«utopia della vita esatta». Il maggiore inconveniente, spiegò Musil, non sarebbe stato in fondo il taglio spontaneo di certe funzioni e abitudini del pensiero operato dalla sintesi scientifica, bensì l'inconsistenza del tipo di verità da questa prospettata in rapporto alle forme limitate dell'ordinario agire quotidiano. L'«utopia dell'esattezza», egli scrisse, assomiglia a quel processo di amplificazione di certi rapporti elementari da cui il ricercatore immagina debbano provenire certi effetti macroscopici della vita; l'infinitesimo in cui è come condensata la forma e l'archetipo di qualsiasi configurazione del mondo sensibile acquisita, per tale immaginazione, le forme utopiche di una realtà non più *limitata*: l'utopia di un incessante ripensamento delle cose in termini di supremi principi colti astrattamente come un culmine di esattezza è suscettibile di capovolgersi paradossalmente nel puro *indefinito*. Usiamo le parole di Musil: «l'utopia è l'esperimento in cui si osservano la probabile trasformazione di un elemento e gli effetti che essa produrrebbe in quel complicato fenomeno che chiamiamo vita. Ora, se l'elemento osservato è la stessa esattezza, lo si isola e lo si lascia sviluppare, lo si considera un'abitudine del pensiero e un atteggiamento di vita e si fa in modo che la sua forza esemplare influisca su tutto ciò che tocca, così si arriva a un uomo in cui si forma una paradossale combinazione di esattezza e di indeterminatezza. Egli possiede quella incorruttibile, voluta freddezza che rappresenta il temperamento che coincide con la precisione; ma all'infuori di tale qualità tutto il resto è indefinito. Le stabili condizioni

dell'animo, che sono garantite da un'etica, hanno scarso valore per un uomo la cui fantasia tende ai cambiamenti; e soprattutto quando l'esigenza di un massimo ed esatissimo adempimento si traspone dal piano intellettuale a quello delle passioni, si ha, come s'è accennato prima, lo stupefacente risultato che le passioni scompaiono e al loro posto compare qualcosa di simile a un fuoco primigenio di bontà.

«Questa è l'utopia dell'esattezza. Non si saprà come un uomo siffatto debba trascorrere le sue giornate, giacché non può librarsi eternamente nell'atto della creazione e avrà sacrificato a una immaginaria conflagrazione il fuocherello domestico di sensazioni limitate».¹⁸

Questi esempi di indagine sui motivi dell'alienazione possono ben suggerire un'antitesi, pur trasposta in regioni così lontane dall'immediato effetto delle invenzioni precedentemente descritte, alla ben più nota e diffusa convinzione che la scienza, ivi comprendendo la matematica, contiene un'ineguagliabile potenza per l'analisi dei fatti concreti. Le caratteristiche dell'antitesi si manifestarono comunque anche nell'ambito stesso dei *fatti* matematici, entrando direttamente nella scena aperta delle dispute sui contenuti della scuola di Frege, Cantor, Russell e Zermelo. Da molti degli scritti che alle tesi logiciste finirono per contrapporsi, a cominciare da quelli di Poincaré del 1905-1906, per proseguire con quelli di Brouwer del 1907 e con le prime esposizioni delle tesi intuizioniste e infine con alcuni celebri risultati di Gödel, emersero idee imprevedibili, accenni a concezioni ritenute da alcuni ormai superate, a ripensamenti forse non più suscettibili di provocare gli effetti di alienazione che la ripetizione di una verità unilaterale finisce per suscitare.

A sostegno di chi confutava la posizione logicista e la fondazione dell'infinito attuale mediante il linguaggio insiemistico ricomparvero le antiche tesi platoniche sui rapporti tra «intellezione» delle verità scientifiche e linguaggio elaborato per descriverle. Matematici come Poincaré e Weyl ristabilirono il legame con quella filosofia che neppure Russell, in fondo, si sentì di liquidare. Scrisse G. de Santillana¹⁹ che in loro ricomparve, oltre il puro scheletro del metodo scientifico, una sorta di coscienza filosofica, di capacità contemplativa e di densità di intuizione quali si è usi ascrivere, di solito, al pensiero tradizionale.

Delle idee platoniche si era fatto interprete P. Boutroux, ricordando che «... i Platonici stabiliscono una separazione profonda tra il "discorso" e "l'intelligenza", tra la scienza scritta che è un'esposizione didattica della verità già conosciuta e la "concezione" delle verità scientifiche, prodotto diretto della nostra facoltà di intuizione esercitantesi sul mondo delle nozioni ideali».²⁰ Un'altra citazione di P. Boutroux, da *L'idéal scientifique des mathématiciens*, comparve più di una volta negli articoli di

commento alla disputa tra empiristi e idealisti, tra intuizionisti e formalisti: «Il fatto matematico è indipendente dal rivestimento logico o algebrico sotto il quale cerchiamo di rappresentarlo: in effetti, l'idea che noi ne abbiamo è più ricca e più piena di tutte le definizioni che noi ne possiamo dare, di tutte le forme o combinazioni di segni o di proposizioni con le quali ci è possibile esprimerle. L'espressione di un fatto matematico è arbitraria, convenzionale. Di contro il fatto in sé, cioè la verità che essa contiene, s'impone al nostro spirito al di là di ogni convenzione. Così non ci si potrebbe rendere conto dello sviluppo delle teorie matematiche se si volesse vedere nelle formule algebriche e nelle combinazioni logiche gli oggetti stessi di cui la matematica persegue l'indagine. Al contrario, tutti i caratteri di tali teorie si spiegano facilmente se si ammette che l'algebra e le proposizioni logiche non sono che il linguaggio nel quale si traduce un insieme di nozioni e di fatti obiettivi».²¹

Un ulteriore commento, forse il migliore, ci proviene da un passo dei *Cahiers* di Simone Weil: «Solo la matematica» ella scrive «ci fa toccare i limiti della nostra intelligenza. Poiché si può sempre credere di un'esperienza che essa è inesplicabile per il fatto che non ne possediamo tutti i dati. Lì, viceversa, noi possediamo tutti i dati, combinati nella piena luce della dimostrazione, e ciò nonostante noi non comprendiamo».²²

Questa non-comprensione, che Platone definì, nella VII *Lettera*, conoscenza al di là dei nomi e delle immagini, rende ammissibile l'esistenza di contraddizioni, errori e malintesi in una scienza esatta come la matematica. Poincaré poté ben asserire allora che «gli uomini non si capiscono, poiché non parlano la stessa lingua e poiché esistono lingue che non si apprendono».²³

S. Weil suggerì come proprio questa circostanza potesse favorire la rinascita di una dialettica nell'ambito della matematica, forse con le stesse aperture all'insondabile di quella di Zenone, e in cui l'elemento paradossale risultasse potenziato dall'apparenza di rigore ed esattezza formale di tesi e dimostrazioni. «Se la contraddizione è ciò che strappa via e tira l'anima verso la luce» ella scrisse «la contemplazione dei principi primi (ipotesi) della geometria e delle scienze connesse deve essere una contemplazione delle loro contraddizioni».²⁴

Quali furono i fatti matematici in cui si condensarono le critiche al logicismo di Russell e al linguaggio insiemistico di Cantor? Prima del perfezionamento delle tesi intuizioniste comparvero sulla scena matematici come Lebesgue, Baire, Borel, che già formularono, fin dal 1905, obiezioni all'idea di infinito attuale, al transfinito e all'uso dell'assioma di Zermelo. Alle questioni di principio sull'attendibilità dei nuovi concetti si aggiunsero necessità urgenti di correzione di alcune lacune nell'apparato logico-deduttivo dei *Principia*, come ad esempio la definibilità dei limiti superiori e inferiori degli insiemi di numeri

reali. Nella gerarchia dei tipi questi limiti superiori e inferiori si trovavano a dover essere (contro le aspettative che una soddisfacente teoria dei reali avrebbe dovuto rispettare) di un «ordine» superiore in confronto ai valori assunti dalla variabile nell'insieme rispetto a cui essi si ponevano appunto come limiti. Russell aveva proposto come rimedio l'assioma di riducibilità, ma H. Weyl lo confutò negando la legittimità dell'assioma e ponendo in discussione, come erronee, le tecniche più acquisite e collaudate dell'analisi; le soluzioni intraviste da H. Weyl lasciavano provvisoriamente esaminare la necessità di una drastica riduzione di nozioni e metodi introdotti e consolidati anche nella matematica pre-cantoriana. Il principio aristotelico del terzo escluso cominciò ad essere messo in discussione, e per conservare intatta la sua applicabilità fu prospettata la restrizione del continuo matematico alla considerazione di quei sottoinsiemi di numeri per cui avesse realmente senso porsi domande che erano state una volta ritenute legittime per una qualsiasi classe di numeri.

Hilbert si propose di salvare dalle antinomie l'integrità della matematica ricorrendo al metodo assiomatico e al calcolo logico, ma rimase egli stesso convinto che l'uso della deduzione logica dovesse ammettere un'ulteriore condizione extralogica, intuibile come esperienza immediata ed anteriore ad ogni attività del pensiero. Ciò lo riavvicinò a Kant, e lo indusse a congetturare che i programmi di Frege e Russell non avrebbero infine raggiunto il loro scopo.²⁵ In accordo con Brouwer egli pure ammise che i poteri del pensiero intuitivo non giungono al transfinito e che perciò i teoremi matematici implicanti questa categoria risultano ingiustificabili come eventuali verità dotate di concreta evidenza. Il suo programma prevedeva una comprensione dell'uso del transfinito da un punto di vista 'finitista'; o per lo meno, in un senso più ristretto e non del tutto adeguato allo scopo dell'effettiva comprensione, la rimozione dell'apparato transfinito dalla dimostrazione di formule non contenenti simboli che lo implicassero.²⁶

In ogni caso, pur nella strenua volontà di conservare intatto ciò che egli definiva il «nuovo paradiso di Cantor», Hilbert dimostrò la più acuta consapevolezza delle difficoltà implicite nell'uso dell'infinito, e giunse a riconoscere che l'infinito attuale usato nei metodi deduttivi era una semplice illusione, rimediabile solo con una sostituzione mediante procedimenti rigidamente finiti capaci di portare agli stessi risultati. Intuendo la difficoltà di un totale affrancamento dall'intuizione e dall'inesprimibilità linguistica di certi concetti primari, Hilbert finì per incentrare l'indagine sul problema della *coerenza*, e formalizzò la matematica in modo da renderla simile a un gioco di simboli privi di significato, in cui la scelta convenzionale delle regole fosse in grado di garantire l'indiscutibilità dei risultati.

Il tentativo di cogliere l'infinito nella sua totalità definendo una completezza che nulla lasciasse fuori di sé era destinato a dimostrarsi illusorio. Nel 1931 Gödel dimostrò che la matematica non cessava di mostrare delle *aperture*, delle allusioni ad *altro* da ciò che essa sarebbe in ogni caso riuscita a esprimere in un sistema formale come quello hilbertiano. La matematica simbolica non era cioè capace di esprimere, come avrebbe auspicato il formalismo, un mondo chiuso ed esauriente di segni, un sistema formale *completo*.

Per un qualsiasi sistema formale della matematica Gödel indicò due inevitabili conseguenze: (1) esistono proposizioni relativamente elementari e intuitivamente vere che non possono essere dedotte nel formalismo del sistema; (2) l'asserzione che esprime la coerenza del sistema non è essa stessa deducibile nel suo formalismo, nel senso che un tentativo di deduzione porterebbe all'assurdità di una relazione come $1 \neq 1$.

L'insanabile incompletezza che ciò determinava, commentò H. Weyl, era sorprendente: essa rivelava come il fatto più semplice e chiaro per l'attitudine creativa della mente fosse viziato da intrinseche oscurità e deficienze qualora fosse contemplato dall'angolo visuale del metodo assiomatico di Hilbert.²⁷ La dimostrazione fornita successivamente da G. Gentzen della coerenza dell'aritmetica risultava non conforme al programma hilbertiano e implicava una fatale penetrazione nel transfinito: H. Weyl la definì una vittoria di Pirro.²⁸

Ma l'aspetto più interessante della questione riguardava proprio l'idea ispiratrice delle tecniche dimostrative di Gödel. In esse l'intenzione paradossale traspariva nettamente dal ricorso al metodo diagonale con cui Cantor aveva dimostrato la non numerabilità del continuo e con cui Richard,²⁹ nel 1905, aveva illustrato la sua antinomia. Una meccanizzazione del processo che avrebbe dovuto più tardi illustrare quest'antinomia non era ignota neppure alla tradizione letteraria e metafisica: Swift lo descrisse nei *Gulliver's Travels* (III, 5) a proposito di un'innovazione didattica in uso all'Accademia di Lagado; R. Lullo la utilizzò nell'*Ars magna*.³⁰

La dimostrazione di Gödel poteva ben considerarsi un geniale contributo all'arte del paradosso, rivelando il valore incomparabile dell'*impossibilità*, dell'*ostacolo*, come veicolo per la comprensione dell'*assenza*, in questo mondo, dell'infinito come totalità. L'intuizione greca sul significato insostituibile di questa assenza, sull'assurdità di un'esplicita rivelazione dell'infinito nei ranghi dell'ordinaria apparenza, sia pur quella legata ad una rappresentazione matematica, trovò infine nell'esito di alcuni teoremi un'evidente conferma.

Altri risultati come il paradosso di Skolem, la conseguente relativizzazione del concetto di classe e il riconoscimento dell'insanabile imprecisione dello strumento assiomatico; la

rifondazione della semantica con la proposta di una distinzione tra linguaggi-oggetto e metalinguaggi disposti nei ranghi di un'indefinita gerarchia, erano altrettante conferme e corroborazioni della nuova visuale imposta dai teoremi di Gödel.

H. Weyl raccolse questo risultato riassumendolo nitidamente in uno scritto del 1932 (*The Open World, Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science*, New Haven, 1932, p. 83); l'infinito è accessibile intuitivamente come campo di possibilità indefinitamente aperto; e in ciò appare analogo alla successione dei numeri che è prolungabile illimitatamente. La completezza, il così detto infinito attuale, è tuttavia al di fuori della nostra portata. Ciò nonostante l'esigenza della totalità spinge la mente a rappresentarsi l'infinito come entità chiusa per tramite di costruzioni simboliche. L'interesse filosofico primario della matematica, nonché della fisica, fu ancora il suggerimento di Weyl, doveva consistere nel raggiungimento di una intrinseca solidità di queste costruzioni simboliche; e il lavoro di Weierstrass, Cantor, Frege, Russell e Hilbert era anche servito a questo scopo.

I frequenti richiami a Pitagora, Bruno, Cusano e alla celebre sentenza di Anassagora: «Del piccolo non c'è il minimo ma sempre un più piccolo», che figurarono nel libro di Weyl, sconcertarono non poco chi si trovò a seguire da vicino l'evolversi delle idee culminanti in quella pubblicazione. E.T. Bell³¹ confessò due anni dopo di essere rimasto seriamente impressionato dal vedere Niccolò Cusano «risuscitato dalla morte», e riflettendo sull'autorità di Weyl in tema di filosofia dell'infinito giunse a ritenere per lo meno difendibile la tesi che la moderna filosofia dell'infinito fosse una filiazione della teologia medievale.

1. Cfr. E. Cassirer, *Teoria della sostanza e della funzione*, Firenze, 1973, p. 78.

2. Cfr. L. Couturat, *op. cit.*, p. 266.

3. *Ibidem*, p. 348.

4. *Ibidem*, pp. 352-353.

5. *Ibidem*, p. 360.

6. Cfr. E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1928, p. 153.

7. Del dibattito sull'infinito che procurò il teorema di Zermelo sono interessanti esemplificazioni le lettere tra Borel, Hadamard, Baire, Lebesgue raccolte in E. Borel, *Théorie des fonctions*, cit.

8. *Werke*, Bd. 3 (erster Halbband), 1899, pp. 249-274.

9. *Werke*, Bd. 3(1), p. 272.

10. Cfr. P.E. Jourdain, *The Development of the Theory of Transfinite Numbers* (part III), in «Archiv der Mathematik und Physik», 22, 1913.

11. Come esempio di antinomia si citerà quella celebre di Russell (1902): Sia A l'insieme di tutti gli insiemi S tali che S non sia membro di se stesso. Allora A è un elemento di A se e solo se A non è un elemento di A . Che esistano insieme che sono elementi di se stessi è esemplificato dall'insieme di tutti gli insiemi che, in quanto insieme, deve appartenere a se stesso. Questa esistenza proviene dalla definizione 'ingenua' di insieme: essa è garantita per ogni molteplicità di oggetti

distinti definita da una qualsiasi condizione.

12. J.M. Copi, *The Burali-Forti Paradox*, in «Philosophy of Science», 25, 1958, pp. 281-286.

13. *Principles of Mathematics*, § 271; trad. it. *I principi della matematica*, Roma, 1971, p. 438.

14. Cfr. H. Poincaré, *Les Mathématiques et la Logique*, in «Revue de Métaph. et de Morale», 1905, pp. 815-835.

15. *Cahiers*, I, Paris, 1970, p. 158.

16. Cfr. *Lezioni e conversazioni*, cit., p. 96.

17. *Minima moralia*, Torino, 1954, pp. 65-67.

18. R. Musil, *op. cit.*, pp. 237-238.

19. *Reflections on Men and Ideas*, Cambridge, Mass., 1970, pp. 188-189.

20. Cfr. A. Dresden, *Brouwer's Contributions to the Foundations of Mathematics*, in «Bull. Amer. Math. Soc.», 30, 1924, p. 35.

21. Cfr. R. Wavre, *Y-a-t-il une crise des mathématiques?*, in «Revue de Métaph. et de Morale», 31, 1924, p. 439.

22. *Cahiers*, III, Paris, 1974, p. 141.

23. Cfr. R. Wavre, *op. cit.*, p. 435.

24. *Cahiers*, I, Paris, 1970, p. 144.

25. Cfr. D. Hilbert, *Über das Unendliche*, in «Math. Annalen», 95, 1925, pp. 161-190; trad. it. in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, Bari, 1967, pp. 161-183.

26. Cfr. G. Kreisel, *Hilbert's Program*, trad. it. in C. Cellucci, *op. cit.*, p. 191.

27. Cfr. H. Weyl, *op. cit.*, p. 220.

28. *Ibidem*.

29. Una versione del paradosso di Richard può essere descritta come segue (cfr. ad esempio E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, New York, 1964, p. 3): Alcune espressioni della lingua italiana denotano dei numeri reali. Ad esempio «il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio» denota il numero π . È possibile ora disporre tutte le espressioni linguistiche in un determinato ordine: quelle con k lettere si possono disporre secondo l'ordine lessicografico (usando cioè il criterio dei dizionari); e le espressioni con k lettere possono precedere nell'ordine quelle con un numero di lettere maggiore. In tal modo si possono *numerare* tutte le espressioni riferentisi a numeri reali semplicemente cancellando tutte le altre espressioni disposte nell'ordine descritto. L'ennesimo numero reale di questa numerazione sia definito come l'ennesimo numero di Richard. Si consideri ora l'espressione seguente: «il numero reale la cui ennesima cifra è 1 se l'ennesima cifra dell'ennesimo numero di Richard *non* è 1, ed è 2 se l'ennesima cifra dell'ennesimo numero di Richard è 1» (facendo assumere ovviamente a n i valori dei successivi numeri naturali). Questa espressione definisce ovviamente un numero di Richard, e occupa perciò un posto determinato nella successione dei numeri di Richard, diciamo il posto associato al numero naturale m . Tuttavia esso differisce, per come è stato definito, dall'emmesimo numero di Richard esattamente per l'emmesima cifra. L'intervento esplicito di una *denotazione* classifica l'antinomia tra i paradossi semantici, accanto al celebre paradosso del mentitore: «io sto mentendo».

30. Cfr. H. Weyl, *op. cit.*, p. 224.

31. *Finite or Infinite?*, in «Phil. of Science», 1, 1934, p. 31.

XIII

L'INFINITO APERTO

Pur nella sua dichiarata antipatia per la dialettica hegeliana Popper pose come criterio di definizione *essenziale* di una teoria scientifica un concetto *negativo* come quello di falsificabilità. Una teoria si *definisce* scientifica se è confutabile; ed è allora evidente che nell'attimo di una sua eventuale confutazione si toccherebbe, come egli stesso si esprime, «la realtà», e si raggiungerebbe quindi il terzo, e più completo, degli stadi di penetrazione della teoria (il primo è lo stadio in cui si «afferra» il senso generale, il secondo è lo stadio in cui si è in grado di ripeterlo e trasmetterlo, il terzo è quello in cui la teoria potrebbe essere confutata).

Pur con intenti affatto dissimili Hegel aveva posto come elemento *essenziale* del finito, esemplificabile in tal caso in una qualsiasi teoria scientifica coerente, il momento della sua negatività, del suo non-essere: «quando delle cose diciamo che son finite, con ciò s'intende che la loro natura, il loro essere è costituito dal non-essere»; ed è proprio questo non-essere, egli spiega, a rivelare la presenza dell'infinito nel mondo e a tradurre, così interpretato, la privazione (la *στέρησις* di Aristotele) in qualcosa di *affermativo*. «Se... si prende la realtà nella sua determinatezza,» scrive Hegel «allora, poiché essa contiene essenzialmente il momento del negativo, la somma di tutte le realtà diventa una somma di tutte le negazioni, la somma cioè di tutte le contraddizioni, e anzitutto, in certa guisa, la *potenza* assoluta, nella quale ogni determinato è assorbito. Ma, siccome questa stessa potenza non è se non in quanto ha ancora di contro a sé qualcosa ch'essa non ha tolto, così quando si pensi come allargata in una potenza compiuta, illimitata, essa diventa l'astratto nulla. Quel reale in ogni reale, l'essere in ogni *esistere*, in cui si dovrebbe aver l'espressione del concetto di Dio, non è altro che l'astratto essere, quello stesso ch'è nulla».¹

Questo tentativo, che è di Hegel, di cogliere la negatività di cui si riveste l'infinito nel suo contatto col mondo, lo si può talvolta riscoprire negli interstizi di molte fra quelle teorie della conoscenza a cui la dialettica hegeliana poteva sembrare uno schema inutilmente costrittivo.

Se si considera ad esempio l'opera di I. Lakatos, per molti aspetti vicina all'ispirazione di Popper, non mancano esempi

capaci di far apprezzare una delle più profonde intenzioni hegeliane, quella cioè di unificare, nei fatti e nelle cose del mondo, le due facce apparentemente più inconciliabili dell'infinito: la pura affermazione e la pura negazione. Secondo Feyerabend «bisogna lodare Lakatos per l'ottimo uso che ha fatto della sua educazione hegeliana»; «d'altra parte» egli aggiunge «è forse necessario criticarlo per non aver rivelato in maniera più diretta la fonte della sua ispirazione e per aver dato l'impressione di essersi rivolto ad una scuola di pensiero molto meno comprensiva e molto più meccanica». ² E anche il buon senso pragmatico della filosofia scientifica di Popper tace del resto sul significato più riposto della dialettica hegeliana che non interessa vedere se non nell'insufficienza della sua capacità esplicativa dei mutamenti evolutivi della scienza. In *Proofs and Refutations* di Lakatos è ben dimostrato, d'altronde, come siano proprio le confutazioni e i controesempi a promuovere le *definizioni*, a delinearne progressivamente il senso e l'esattezza, fino a suscitare la misteriosa emergenza dell'idea formatrice, cioè dell'angolo visuale da cui si contempla un oggetto secondo criteri di autentica originalità.

L'intento di Lakatos è di togliere alla dimostrazione matematica la sua apparente unidirezionalità. Si potrebbe anche aggiungere, forse valicando i confini di una semplice intenzione scientifica, che si tratta in tal caso di un affrancamento del procedimento dimostrativo dal *desiderio*, cioè dalla pretesa illusoria di trovare ciò che si cerca. A chi ha fretta di arrivare a una conclusione si risponde: «A voi interessano soltanto le dimostrazioni che 'dimostrano' ciò che per mezzo di esse intendevate dimostrare. A me interessano le dimostrazioni anche se esse non ottengono lo scopo per cui erano intese. Colombo non raggiunse l'India, ma scoprì qualcosa di piuttosto interessante». ³

Ciò che accompagna il ricercatore, in questa fase, è allora una sorta di parvenza del *vuoto*, che si potrebbe anche definire, in tono consolatorio, come il rigetto d'ogni idolatria scientifica. Naturalmente il vuoto può popolarsi di 'mostri' (cioè di eccezioni, controesempi, deformazioni concettuali) e dare luogo alla convinzione che «se vogliamo imparare qualcosa di veramente profondo, dobbiamo studiarlo non nella sua forma 'normale', regolare, consueta, ma nel suo stato critico, in un momento di febbre, di passione»; da cui l'estremo e ambiguo consiglio: «se volete conoscere il corpo normale, in salute, studiatelo quando è anormale, quando è malato». ⁴

Questo percorso dell'irregolarità, in una accettazione incondizionata ma vigilante dell'apertura incolmabile suscitata dall'insorgere di un problema, è precisamente quel momento negativo d'ogni esperienza che neppure i limiti apodittici di una definizione o di una dimostrazione matematica sono in grado di illuminare. Lakatos toglie del resto alla dimostrazione il suo

apparente carattere di infallibilità, quand'essa intenda configurarsi quale prova d'una 'verità' conclusiva. Egli cita G.H. Hardy che scrive: «non esiste strettamente parlando nessuna cosa come una dimostrazione matematica; non possiamo fare altro, in ultima analisi, che indicare; ... le dimostrazioni sono ciò che Littlewood ed io chiamiamo ciance [*gas*], arabeschi [*flourishes*] retorici disegnati per colpire la psiche, illustrazioni sul tabellone d'una conferenza, meccanismi per stimolare l'immaginazione degli allievi». E Polya, ricorda ancora Lakatos, rileva come le dimostrazioni, anche quelle incomplete, non fanno altro che stabilire «connessioni tra fatti matematici e questo ci aiuta a mantenerli nella nostra memoria: le dimostrazioni producono un sistema di mnemotecnica». ⁵ Del resto anche Wittgenstein consigliava, per cogliere il significato di una tesi, di attenersi principalmente al senso della sua *dimostrazione*.

Questo può anche significare che in un certo periodo del '900 il recupero dell'infinità come pura potenza fu agevolato dalla crescita di una critica radicale dell'atto di persuasione, coinvolgente lo stesso carattere apodittico della dimostrazione matematica. Il 'gesto' della persuasione che Adorno (oltre che Wittgenstein) seppe smascherare con argomenti decisivi, e tali da scarnificare letteralmente la sua stessa struttura organizzativa del sapere, riguadagnò l'antica ambivalenza del verbo πείθω, che Omero usava nell'*Odissea* (II, 106) nel duplice significato di «convincere» e «ingannare» o «deludere».

In senso lato si poteva anche dare ragione a Husserl o a Heidegger. Husserl lasciava intendere nella *Crisi delle scienze europee* come una matematica ideale manovrata da un Metodo onnicomprensivo avesse l'irresistibile tendenza, a partire da Galileo e Cartesio, a tramutarsi in tecnica reificante, procedimento descrittivo affatto separato dal mondo della soggettività, e sfociante quindi nell'alienazione e nel fallimento. L'intrinseca incoerenza di una rappresentazione matematica dell'infinito elaborata nello spirito della scienza cartesiana, leibniziana o anche cantoriana, poteva essere allora spiegata da questa semplice constatazione: se si denota l'infinito con un segno e lo si immerge in una «matematica universale» che si ritiene capace di spiegare razionalmente una realtà separata dal soggetto, si opera con ciò una divisione che 'oggettivizza' la verità in forme assolute, stabili e univocamente significanti, e si tende così a confondere una rappresentazione con l'essere invisibile che questa semplicemente annuncia e insieme nasconde, nella sua funzione di simbolo.

Se è vero, come scrive N. Wiener, che «il pensiero di ogni epoca si riflette nella sua tecnica», ⁶ si potrebbe anche scorgere in taluni aspetti del pensiero di Heidegger una stretta relazione con la crisi dei fondamenti della matematica. La scoperta delle antinomie svolge un ruolo implicitamente rilevante nell'apertura

di *Sein und Zeit*, dove è scritto che «il livello di una scienza si misura dall'ampiezza entro cui è capace di ospitare la crisi dei suoi concetti fondamentali». ⁷ Non solo, ma l'apertura generata dal crollo delle certezze e da quella che Heidegger definiva l'intrinseca problematicità dell'ente (das Frag-würdige), mette a nudo quell'ambito di idee che stanno a fondamento della scienza come ricerca positiva; e così, ogni ulteriore indagine è automaticamente costretta a porsi il problema dell'essere delle cose (in un senso diverso, ma per un verso analogo a quello inteso da Popper quando scrive che la confutazione avvicina alla realtà); proprio quell'essere, si direbbe, che Bolzano aveva voluto escludere dal linguaggio scientifico. La rappresentazione dell'infinito come *segno* matematico poteva porsi perfettamente come un aspetto emblematico di quello che Heidegger definì negli *Holzwege* come il tratto fondamentale del mondo moderno, e cioè «la conquista del mondo risolto in immagine», ⁸ la lotta aggressiva per la pianificazione e il controllo di tutte le cose definitivamente stabilizzate nella loro oggettività.

Ma l'estrema conseguenza di questa volontà di dominio doveva essere, come scrive Heidegger, l'affacciarsi dell'*incalcolabile*, e quindi, nella matematica, dell'antinomia. L'incalcolabile diventava allora «l'ombra invisibile che si distende su tutte le cose quando l'uomo sia divenuto *subjectum* e il mondo immagine». ⁹ L'ombra non era altro, forse, che un offuscamento degli idoli. Proprio in 'idoli', infatti, il pensiero aveva fatalmente tramutato ciò che per Heidegger era l'insieme complessivo degli enti, delle cose in cui normalmente ci imbattiamo: «Ente è tutto ciò di cui parliamo, ciò a cui pensiamo, ciò nei cui riguardi ci comportiamo in un modo o nell'altro». ¹⁰ Come si sarebbe potuto allora continuare a credere che le *immagini* matematiche del transfinito o dell'irrazionale potessero fornire, nella loro nuda oggettività, definitive indicazioni di ciò che è l'infinito?

È anche vero però che l'idolatria, come notava S. Weil, è una «necessità vitale» di chi sta nella caverna platonica. «Anche tra i migliori, è inevitabile che essa limiti strettamente l'intelligenza e la bontà». ¹¹ È facile che non si resista a lungo all'orrore del vuoto: «il vuoto è la pienezza suprema ma l'uomo non ha il diritto di saperlo». ¹²

Heidegger colse evidentemente il rischio di una sospensione nel vuoto quando osservò che, per la scoperta dell'incalcolabile, «il mondo moderno si dispone in una regione che sfugge alla rappresentazione». ¹³ L'uomo avrebbe dovuto conoscere la verità e custodirla con la riflessione pura, mantenendosi in un territorio ambiguo sospeso sull'abisso che separa l'ente dall'essere. L'uomo appartiene all'essere, ma «resta tuttavia straniero nell'ente»; e questa fatale attrazione dell'ente e della sua reificazione poteva infine profilarsi, come scrisse Adorno con retorica spietatezza, come una nuova «oggettualità quasi d'ordine superiore», ¹⁴ un

tendere fatale dell'oscillazione del pensiero verso una meta inesprimibile, e tuttavia vista irresistibilmente come contenuto *positivo* del nuovo filosofare. È pur vero, scriveva Heidegger, che «la comprensione dell'essere, malgrado tutto il suo valore, risulta oscura, confusa, coperta, nascosta»; tuttavia «proprio per questo essa deve venire chiarita, districata, sottratta al suo nascondimento». ¹⁵ Il «nuovo domandare» che automaticamente scaturiva dalla riconosciuta «problematicità» dell'ente generava uno spazio *aperto*, ma s'intendeva che esso stesso dovesse istituire «un nuovo spazio che tutto include e attraversa». ¹⁶ La forza di seduzione della contingenza storica avrebbe potuto incautamente tradurre questa nuova positività in evento preciso, ancora una volta (paradossalmente) *calcolabile*.

La 'disavventura' che colpì Heidegger in prima persona nel suo contatto con la 'volgarità' della storia fu riepilogata da Karl Löwith. Nel discorso di Heidegger per l'assunzione del rettorato a Friburgo (1933), egli vide quella «equivoca confusione tra storia effettuale ed evenienza autentica dell'Esserci» ¹⁷ che è d'altronde il punto cruciale di attrazione dell'abisso e dell'infinità. Non a caso quel personaggio emblematico che ne *Gli incolpevoli* di H. Broch assume il nome di Zaccaria cita il popolo tedesco come depositario ed interprete del mistero dell'Infinito. Il suo discorso è perfetto ed è anche un indiretto commento alla giustificazione del fraintendimento della storia che si deduce dagli *Holzwege* di Heidegger. Heidegger lascia intendere che l'Essere si ritrae proprio nell'attimo in cui si scopre nell'essente. Questo ritrarsi produce un errore fatale, che appartiene all'essenza della verità; sicché il divenire della storia è per sua essenza il regno del travisamento, dell'inganno di un folle (*Irrer*). ¹⁸ Il volto della verità non può essere allora che la morte, l'annientamento, e chi se ne fa interprete rende giustizia all'inesorabilità del discoprimiento storico dell'Essere, e ubbidisce ad una ingiunzione fatale, che non ammette ricorso in appello.

Zaccaria affronta il problema in chiave profetica, ed anche nei termini enfatici di chi va incontro alla morte senza ancora subirne l'effetto catartico e virtualmente rigeneratore: «... dobbiamo sempre sprofondare nella malvagità» egli dichiara «onde elevarci come gli altri a uno stato di superiore perfezione e sempre, con nostra sorpresa, l'ingiustizia si è trasformata nelle nostre mani, a fatto compiuto, in giustizia. Poiché noi siamo il popolo dell'Infinito, il popolo, quindi, della morte, mentre gli altri sono rimasti nella Finitezza, nello spirito materialista, nello spirito venale, prigionieri del commensurabile, poiché essi vogliono conoscere soltanto la vita e non la morte, e perciò, per quanto all'apparenza possano elevarsi così facilmente e così in alto al di sopra di se stessi, dimostrano poi di non essere in grado di infrangere i limiti del Finito. Per la loro salvezza dobbiamo infliggere loro il castigo dell'Infinitezza gravida di morte.

Formidabile lezione, in verità, lezione durissima! Difficile è seguirla, e più difficile ancora impartirla, in quanto a noi, i maestri, è stata imposta non soltanto la dignità del giudice, ma anche l'indegnità del carnefice. Nell'infinito, infatti, tutto sussiste ad un tempo: dignità e indegnità, quello che è santo e quello che è da redimere, benevolenza e malevolenza, e qui sta appunto la maledizione della grazia a noi imposta, la duplice funzione nell'esercizio della quale diventiamo odiosi a noi stessi come agli altri: ogni colpo che siamo costretti a dirigere contro di loro, colpisce anche il nostro cuore, ogni punizione che dobbiamo infliggere loro, è punizione per noi stessi. Il nostro magistero universale è una maledizione della grazia, e tuttavia noi ce lo siamo addossato, per amore della veracità che abita nell'Infinitezza e conseguentemente in noi: abbiamo assunto tale impegno come tedeschi e non abbiamo voluto rifiutarlo, memori del fatto che noi siamo i soli a ignorare l'ipocrisia». ¹⁹

Ma perché l'Infinito invoca la morte? Perché non tollera la *finzione* di se stesso, si potrebbe forse rispondere con Zaccaria. L'uomo in cerca dell'infinitezza incontra solo finzioni, e il contenuto di gratificante 'realtà' che pur si continua a pretendere abbiano i fatti, irresistibilmente tramutati in idoli dall'istinto comune o dal dogma sensista, opera infine l'inganno di una fede male orientata, e in definitiva un vero e proprio travisamento. Questo travisamento proviene allora (ma questo Zaccaria non lo vede) da una semplice circostanza: la 'realtà' del mondo continua a presentarsi, agli occhi di chi vuole trascenderla, con le credenziali di un'invincibile e allettante concretezza.

È allora evidente, per inciso, come l'esperienza amorosa di Zaccaria con Filippina aneli al suicidio. Zaccaria paventa infatti più della morte ciò che tormentava il Medardo di Hoffmann: «I più bassi istinti materiali, mascherati da mistici rapimenti, si scatenano in noi promettendoci, già fin di quaggiù, l'appagamento dei nostri sogni più esaltati; la passione inconscia ne rimane ingannata e l'aspirazione alle cose sante, ultraterrene, si spezza nell'ineffabile, mai provata gioia dei sensi». ²⁰

Il sentiero della verità è dunque, come annotava Broch, infinitamente stretto. Esso separa due mondi ed espone chi lo percorre al rischio mortale di una caduta irreversibile. Su questo sentiero, per Broch, finiscono anche per incontrarsi i principi ultimi dell'arte poetica e del pensiero scientifico, specie dopo il crollo delle posizioni apodittiche del positivismo ottocentesco operato dalla scoperta delle antinomie. L'unità di scienza (filosofia) e poesia si opera, egli spiega, solo nei *fondamenti* della conoscenza, e non può contare sui parallelismi e sulle facili analogie che stupiscono l'osservatore ad un primo *coup d'œil*.

Ma come agisce l'intuizione dell'infinità nella scienza e, in particolare, nella matematica? Il mistero è in fondo questo: «senza la preventiva conoscenza di un'incognita nessun

problema... potrebbe venir posto, né la matematica fa eccezione. È appunto la precognizione dell'infinito e del *continuum* a spingere la matematica verso una costruzione via via sempre più complessa della infinita molteplicità degli enti...». ²¹ Questa precognizione ha sede, per Broch, in una sorta di inconscio gnoseologico cui si deve ogni esplicazione della sfera razionale. Da esso nasce l'intuito che consente di attribuire carattere di esattezza e verità a quel movimento ascensionale di concetti, dal numero naturale al transfinito, che non ammette chiusura di sorta.

Nell'inconscio gnoseologico si incentra allora, in una completa clandestinità, quel punto di raccordo delle varie attività dello spirito che culmina nella precognizione dell'infinito. Da questo punto provengono cioè non solo i concetti della matematica, ma tutte le intuizioni più o meno consapevoli delle «combinazioni di cose e proprietà del mondo» che intervengono nella sfera dell'azione ordinaria. «Solo grazie a questo sapere» scrive Broch «egli [l'uomo] è in grado di raccapezzarsi 'intuitivamente' nella vita quotidiana, di scegliere 'istintivamente' l'azione 'giusta' tra tutte le azioni possibili, nonché di assumere qualche volta (non sempre) un atteggiamento 'razionale' pur nel suo procedere a tastoni, da sonnambulo». ²²

L'uomo, si direbbe, è tanto più geniale quanto più sa tenere insieme il mondo facendolo corrispondere a una rete ideale, sufficientemente fitta ed esauriente, di combinazioni di eventi (il culmine della genialità è quindi Moosbrugger). Ma la migliore espressione di questo intreccio di combinazioni possibili (e impossibili) è offerto, evidentemente, dalla matematica. Solo lì i problemi sono descritti, apparentemente, senza lacune e almeno implicitamente risolti coll'esattezza che nessun altro procedimento consentirebbe. La matematica ha inoltre questo vantaggio (che colpì Broch in modo particolare): essa è in grado di edificare una *propria* sfera *empirica* di nozioni e concetti, secondo una logica vicina a quella intuizionista, mediante costruzioni *effettive* immuni da contraddizioni. Quanto più queste costruzioni si fanno complesse, tanto più si ha allora agio di riconoscere che «le relazioni del mondo empirico sono per così dire una sotto-quantità di quelle matematiche»; ²³ e i concetti della matematica divengono di conseguenza un apparato di unità ideali cui l'intera esperienza soggettiva può riferirsi.

Cosa succederebbe spingendo all'estremo questo procedimento? Si arriverebbe, dice Broch, a un «nirvana della precisione, realizzabile – sempre che lo fosse – per mezzo degli strumenti matematici elaborati dalla scienza occidentale». ²⁴ Ma questo nirvana della precisione è un'utopia, nello stesso identico senso che Musil intendeva scrivendo di un'«utopia della vita esatta». Il suo raggiungimento annienterebbe chiunque. Questa difficoltà, che sorge improvvisamente in tutta la sua evidenza

intuitiva, trova allora un esatto corrispettivo nelle antinomie matematiche. Per la «matematizzazione del mondo» prospettata da Broch, esse gettano la loro ombra su tutta la vita dell'uomo; e l'infinito matematico finisce così per indicare, in quel margine di incognitività che esso richiede nel modo più nitido, interi ambiti di impossibilità e interdizione nel mondo dell'agire empirico.

Ma il 'residuo di qualità' di cui l'infinito impedisce una qualsiasi rappresentazione linguistica è anche l'anima del simbolico, come intuiva Broch.²⁵ È in definitiva l'infinito a fare del simbolo un meccanismo non significativamente *univoco*, bensì semplicemente allusivo e polivalente, e perciò liberatorio.

Come scrisse Hofmannsthal, in una pagina integralmente ripresa da F. Waismann, «nell'illimitatezza dei dettagli e delle particolarità della descrizione, l'oggetto stesso sembra opprimerci e sopraffarci: ma ciò che ci verrebbe tanto vicino da farci male se ci limitassimo ai significati immediati, si risolve, per virtù della molteplicità semantica delle parole, in una magica nebbia, e in tal modo, dietro il significato immediato, ne presagiamo un altro che è derivato da quello. È così che noi non perdiamo di vista il senso proprio e originario: laddove, però, questo senso era ordinario e mediocre, perde la sua ordinarietà, e spesso, considerando la parola, siamo in dubbio, nella nostra consapevolezza percettiva, fra la realtà particolare che essa simboleggia e una realtà superiore, e questo ci solleva in un lampo al grande e al sublime».²⁶

F. Waismann applicò il principio della polisemia linguistica ai più celebri enigmi sull'infinito, e vide anche nel paradosso di Zenone l'effetto di un'incontrollata polivalenza del segno. Di più, F. Waismann coinvolse nel problema del significato la stessa idea di *azione*, facendone il supporto fattuale (e pur non calcolabile) di una *ambiguità sistematica*, di un'apertura incolmabile di «cause» fisiologiche o di «motivazioni» non strettamente deterministiche. Vi sono modi diversi di considerare un'azione esattamente come vi sono modi diversi di considerare una parola o una proposizione linguistica.²⁷ E, si potrebbe aggiungere, il linguaggio matematico offre i più precisi modelli di questa ambiguità.

È allora evidente come il problema matematico dell'infinito si trovi automaticamente proiettato nella sfera *morale*. Questa proiezione è implicitamente suggerita da Broch e si trova chiaramente prefigurata nell'opera di Musil, oltre che di Nietzsche.

Tutto ciò può dare un'idea approssimativa di ciò che poté costituire, per alcuni, la potenza simbolica del segno matematico. Questa sopravanza di molto, evidentemente, l'empiria in cui si svolge la vita, per così dire, semplicemente 'corporea' del simbolo. Eppure questa stessa empiria, in cui consiste propriamente ogni attività matematica, ha l'irresistibile tendenza a manifestarsi come sistema autonomo, orientato alla progressiva

(e interminabile) chiusura delle proprie lacune, e chiaramente propenso, in generale, a trattare la fase di precognizione dell'infinito (o del continuo) come incognita estranea alla finalità immanente del proprio sviluppo. La matematica tende a riassumere in qualche senso i lineamenti che Husserl e Heidegger, più o meno esplicitamente, le avevano attribuito. A questo stadio, l'infinità potenziale riconquistata dopo l'irruzione delle antinomie appare più aperta che mai. Essa riprende esattamente il senso della «sincategorematicità» precisato dal pensiero medioevale, cioè di qualcosa che procede nel finito, muovendosi per semplici cambiamenti di prospettive e paradigmi o per accrescimenti graduali senza meta finale di sorta. La meta non esiste in due sensi distinti: da un lato perché si tratta in ogni caso di un percorso *aperto*, dall'altro perché la causa finale dell'attività di ricerca non potrebbe che riconnettersi a quell'attività di precognizione dell'assoluto che viene di solito accantonata come extra-incognita o pseudoproblema. Il ripensamento dell'infinito come pura negatività generato dalla scoperta dei paradossi sfuma così nell'obliterazione: non certo per il fatto che si dimentica l'impossibilità dell'infinito in atto, ma piuttosto nel senso che finisce coll'imporsi un sapere incentrato sull'operatività e l'effettualità; un sapere cioè *positivo*, e generalmente dimentico delle trascorse perturbazioni e degli effetti emozionali inizialmente provocati dalle antinomie.

Nella matematica questo aspetto 'costruttivo' e pragmatico che si infiltrò dopo la crisi dei fondamenti si può già rintracciare in certe dichiarazioni di J. von Neumann e di Gödel. Von Neumann propose, nel 1954, di considerare legittimo l'uso di nozioni matematiche non perfettamente filtrate da una critica rigorosa.²⁸ Gödel osservò come i paradossi della teoria degli insiemi non giustificavano un atteggiamento *negativo* nei riguardi di tale teoria. Si trattava di un problema di innegabile serietà, ma più vicino alla logica e all'epistemologia che non alla matematica. Gödel suggerì anche un criterio di verità degli assiomi fondato sulla loro fecondità nella matematica come nella fisica. Si può decidere che sia il «successo» a misurare la «verità» di un assioma, egli scrisse, e non una sua presunta intrinseca «necessità».²⁹ In un recente articolo G.J. Chaitin³⁰ ha modo di osservare come i teoremi di Gödel, dopo un primo effetto dirompente, rimasero pressoché ignorati dalle *everyday activities* dei matematici (e a tali *everyday activities* sarebbe dovuto tutto il possibile rispetto secondo quanto raccomandato da von Neumann: «... penso che sia estremamente istruttivo contemplare il ruolo della scienza nella sua vita d'ogni giorno, e notare come in questa regione il principio del *laissez faire* ha condotto a strani e meravigliosi risultati»³¹). L'idea di Chaitin è singolare e degna di nota: egli prende di mira non tanto la questione della *dimostrabilità* di un teorema in un sistema

formale, quanto il grado di *complessità* della dimostrazione. Questa complessità è anche una misura, secondo quanto precisato dallo stesso Chaitin e da Kolmogorov, del grado di *informazione* contenuta nel teorema da dimostrare.

Il matematico, spiega Chaitin, ha due opzioni. La prima è di accettare le congetture che sono state formulate in base alla loro corroborazione empirica, esattamente, egli scrive, come fanno gli scienziati sperimentali. La seconda è di ricondursi a principi generali da cui procedere deduttivamente. La seconda possibilità, egli precisa, ha un costo elevato: la complessità, spesso enorme, delle dimostrazioni. Non a caso i noti risultati di M. Presburger sulla decidibilità della teoria additiva dei numeri interi soffrono di un inconveniente: come è stato meglio precisato, successivamente, da M. Fischer e M. Rabin, ogni *algoritmo* costruito per dedurre i teoremi di quella teoria si imbatte in proposizioni dimostrabili solo in un numero spropositato di passaggi. Si tratta, come si suol dire, di un caso di problema *intrattabile*. Come comportarsi allora? Una singolare circostanza vuole a questo punto che l'ostacolo epistemologico dei teoremi di Gödel, unito alle prove di intrattabilità, si capovolga in un momento complessivamente *positivo* dell'indagine matematica. Questo trapasso è visibile nel modo più nitido in un'osservazione di Chaitin. «Il teorema di Gödel» egli spiega «non significa che i matematici devono smettere di capire le proprietà dei numeri naturali; esso significa semplicemente che si devono adottare nuovi assiomi non appena si cerca di ordinare e interconnettere, di organizzare e includere, sempre più estese osservazioni matematiche». Usando la complessità come misura dell'informazione racchiusa in un sistema di assiomi, si verrebbe allora a disporre di un insieme *aperto* di ipotesi di fronte alle quali il matematico si troverebbe a lavorare all'incirca come un fisico. «Il matematico» aggiunge Chaitin «non dovrebbe turbarsi più di un fisico quando ha bisogno di assumere un nuovo assioma; né dovrebbe troppo inorridire quando un assioma deve essere abbandonato perché si trova che esso contraddice una teoria preesistente, o perché esso predice proprietà dei numeri naturali che non sono corroborate empiricamente». La conclusione, detta esplicitamente, si formula come segue: «... potrebbero esserci giustificazioni teoretiche per considerare la teoria dei numeri come una scienza empirica in fase dinamica piuttosto che come un corpo chiuso e statico...». ³²

La nozione di complessità verrebbe allora a collocarsi, per ciò che si è detto, quasi al culmine dell'edificio matematico, non solo definendone e misurandone i principi (o meglio gli assiomi), ma anche ponendosi a giudice ed arbitro delle scelte delle ipotesi dei percorsi dimostrativi e illustrativi dei risultati. Ponendosi la domanda di quanti bit di informazione-complessità consiste un insieme di assiomi, e di quanto complessa è la dimostrazione di

un teorema o l'attuazione di una verifica, si hanno automaticamente a disposizione nuovi criteri per decidere se una congettura ampiamente corroborata o un nuovo assioma hanno diritto di essere inclusi nella teoria. In questa prospettiva è visualizzabile, ad esempio, la celebre ipotesi di Riemann, più o meno convenientemente assunta come assioma nel caso ci si ponga il problema di verificare se un numero naturale è un numero primo.³³

Se si volesse azzardare un tentativo di accostamento di una scelta scientifica ad un'etica o addirittura a una metafisica, si potrebbe sentirsi suggestionati, in questo caso, da un'osservazione di Pjatigorskij³⁴ sul pensiero buddhista: «Il massimo problema metafisico della filosofia buddhista» egli scrive «è quello della complessità di... tutto, o per essere più precisi, è che ogni fenomeno è complesso nel senso che qualsiasi cosa può sussistere come fenomeno soltanto in quanto complessa». Da ciò si ricaverebbe perlomeno una indicazione sul senso profondo (e coinvolgente tutti i livelli dell'esistenza) che può acquistare la rinuncia a domande dirette ed univoche quali «*che cos'è questo o quello*», che per l'appunto il Buddhismo ha generalmente evitato come fuorvianti, preferendo la via empirica della *fluidità*, dell'*apertura* e dell'*essere in relazione* dei fenomeni.

Senza interrogare il Buddhismo ci si potrebbe del resto ispirare anche a libri come *Le macroscope* di J. de Rosnay, e alle qualità dell'approccio sistemico alla comprensione delle strutture infinitamente complesse. J. de Rosnay non esita ad associare a tali qualità (che non mancano di essere fondate in modo rigidamente scientifico) la proposta di un'etica, e, si potrebbe dire, di un'inedita *Weltanschauung*, non priva di potenziali richiami a quelle sfere della sapienza che la scienza ufficiale preferisce d'altronde ignorare (pesa infatti considerevolmente un'affermazione come questa di von Neumann, oltremodo suscettibile d'essere intesa in senso riduttivo: «è davvero importante che essa [la matematica] stabilisca certi standard di verità; ed è davvero importante che essa sembri fornire un mezzo per stabilire questi standard in modo sufficientemente autonomo da ogni altra cosa»; in modo sufficientemente autonomo, anche, da questioni «emozionali» o «moral»).

Tutto ciò ha le sue radici, in ultima analisi, nella matematica e nel suo essersi anticipatamente conformata a quel modello di scienza dell'*automa* che svolge un ruolo insostituibile nel libro di de Rosnay e nell'idea di complessità. La comprensione delle leggi di funzionamento di un sistema infinitamente complesso (una cellula, un organismo, una città o un ecosistema) si svolge secondo criteri di percezione globale delle interazioni delle varie componenti che assomigliano a quelli già delineati da J. von Neumann nella sua prima descrizione degli automi, e della loro

somiglianza agli organismi viventi. Secondo una formula usata da von Neumann ³⁵ l'automa potrebbe concepirsi quale un «organismo affidabile» (in un senso stabilito dalla teoria *statistica* dell'errore) fondato sulla reciproca interazione di componenti singolarmente *non* affidabili. E questo è già l'esempio di un sistema di cui interessano la struttura a larga scala e gli effetti globali, osservabili a una distanza da cui è superfluo, per così dire, l'uso del microscopio. Di più, il modello matematico su cui si fonda la struttura 'ideale' e semplificata dell'automa (scissa momentaneamente dal problema statistico degli errori) è quello fornito dalla logica intuizionista, cioè da una logica costruttiva e fortemente immunizzata contro le ambiguità dell'infinito. La rappresentabilità della logica intuizionista in termini di reti elettriche (o sistemi nervosi idealizzati), come fu precisata da Turing, McCulloch e Pitts, e dallo stesso von Neumann, divenne così un ulteriore, rassicurante e potente argomento (ricolmo per di più di un'insuperabile carica fattuale) per decidere di operare il più possibile sul terreno del *finito*.

Non si può non meditare, in definitiva, sulle parole con cui J. von Neumann alluse all'insuperabile *flessibilità* concettuale della matematica. E senza le oscurità, i dubbi e le incertezze, mescolate all'esattezza, difficilmente si potrebbe concludere in questo modo: «Sento che uno dei più importanti contributi della matematica al nostro pensiero sta nel fatto che essa ha dimostrato un'enorme flessibilità nella formazione di concetti, un grado di flessibilità al quale è molto difficile arrivare con un metodo non matematico».³⁶

1. G.W.F. Hegel, *Scienza della logica*, Bari, 1974, vol. I, lib. I, sez. II, cap. II, p. 130.

2. P.K. Feyerabend, *Contro il metodo*, Milano, 1973, p. 160 (nota 91 del testo).

3. I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, in «Brit. J. Phil. Sci.», 14, 1963, p. 15.

4. *Ibidem*, p. 25.

5. *Ibidem*, pp. 125-126.

6. N. Wiener, *La cibernetica*, Milano, 1968, p. 65.

7. M. Heidegger, *Essere e tempo*, Torino, 1978, p. 62.

8. M. Heidegger, *Sentieri interrotti*, Firenze, 1968, p. 99.

9. *Ibidem*, p. 100.

10. M. Heidegger, *Essere e tempo*, cit., p. 59.

11. S. Weil, *Cahiers*, II, cit., p. 18.

12. *Ibidem*, p. 19.

13. M. Heidegger, *Sentieri interrotti*, cit., p. 101.

14. T.W. Adorno, *Dialettica negativa*, Torino, 1970, p. 98.

15. M. Heidegger, *Introduzione alla metafisica*, Milano, 1968-79, p. 93.

16. *Ibidem*, p. 40.

17. K. Löwith, *Saggi su Heidegger*, Torino, 1966, p. 56.

18. *Ibidem*, p. 58.

19. H. Broch, *Gli incolpevoli*, Torino, 1963, p. 141.

20. E.T.A. Hoffmann, *Gli elisir del diavolo*, in *Romanzi e racconti*, vol. I, Torino, 1969, p. 456.

21. H. Broch, *Azione e conoscenza*, Milano, 1965, p. 180.

22. *Ibidem*, pp. 181-182.
23. *Ibidem*, p. 178.
24. *Ibidem*, p. 183.
25. *Ibidem*, p. 186.
26. F. Waismann, *Analisi linguistica e filosofia*, Roma, 1970, pp. 111-112.
27. *Ibidem*, p. 127.
28. Cfr. J. von Neumann, *Collected Works*, VI, a cura di A.H. Taub, New York, 1963, pp. 480-481.
29. Cfr. K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, trad. it. in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, Bari, 1967, pp. 113-136.
30. G.J. Chaitin, *Information-Theoretic Limitations of Formal Systems*, in «J. ACM», 21, 1974, pp. 403-424.
31. J. von Neumann, *Collected Works*, VI, cit., p. 490.
32. La conclusione cui Chaitin perviene attraverso la nozione di complessità è in fondo la stessa prospettata da I. Lakatos: cfr. *Mathematics, Science and Epistemology*, Philos. Papers, vol. 2, a cura di J. Wottall and G. Currie, Cambridge, 1978. Lakatos cita come precursori di una visione della matematica come scienza empirica anche Russell, Fraenkel, Carnap, Curry e Mostowski. Quest'ultimo si appella ai risultati «negativi» di Gödel in un modo che ricorda da vicino Chaitin: «I risultati di Gödel e altri risultati negativi» egli scrive «confermano... che la matematica è... una scienza empirica, che le sue nozioni e metodi hanno la loro radice nell'esperienza...» (p. 27).
33. Cfr. G.L. Miller, *Riemann's Hypothesis and a Test for Primality*, in «J. Comp. Sys. Sci.», 13, 1976, pp. 300-317; e M.O. Rabin, *Probabilistic Algorithms*, in *Algorithms and Complexity, Recent Results and New Directions*, a cura di J.F. Traub, New York, 1976, pp. 21-40.
34. A. Pjatigorskij, *La riontologizzazione del pensiero nel Buddhismo*, I, in «Conosc. Rel.», 1978, pp. 342-366.
35. Cfr. J. von Neumann, *Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components*, *Collected Works*, V, cit., pp. 329-378.
36. J. von Neumann, *Collected Works*, VI, cit., p. 482.